INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2018
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - Corrigé
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx$.

   On pose $u = e^x$, $du = e^x dx$, et on en tire

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx = \int_1^e \frac{du}{u+5} = \ln(e+5) - \ln 6$$

2. Donner la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(2x)}$.

   En utilisant les règles de dérivation de fonctions composées pour le dénominateur, puis la règle de dérivation d'un quotient, on trouve que

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos(2x) + 4 \sin x \sin(2x)}{\cos^3(2x)}$$

3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$.

   En divisant numérateur et dénominateur par x, il vient immédiatement que la limite demandée est 0.

4. Donner la limite en $x = 1$ de la fonction de la question précédente.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}.$$

   On simplifie la fraction par $(\sqrt{x}-1)$ et la limite cherchée est 1/4.

5. Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique.

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6})$$

6. L'inscription à un concours de tir à l'arc est de 10 francs. Le laureat du concours reçoit 50 francs et gagne donc 40 francs au total ; le second reçoit 20 francs, le troisième 10 francs et les autres ne reçoivent rien (et perdent donc le montant de leur inscription). 10 concurrents de même qualité sont inscrits : quelle est l'espérance du gain de chacun d'eux ?

   Chaque joueur a une probabilité égale à $1/10$ de gagner 40 francs, une probabilité égale à $1/10$ de gagner 10 francs, une probabilité égale à $1/10$ de ne rien gagner, et une probabilité égale à $7/10$ de perdre sa mise, soit 10 francs. L'espérance du gain est donc

$$40 \times \frac{1}{10} + 10 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{10} - 10 \times \frac{7}{10} = -2$$

   soit une perte de 2 francs.

7. Donner la limite, si elle existe, de $(x-1)\ln(x^2-1)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

$$(x-1)\ln(x^2-1) = (x-1)\ln(x-1) + (x-1)\ln(x+1).$$

   Le premier terme tend vers 0 par la règle de comparaison des fonctions logarithme et puissances au voisinage de 0, et le deuxième terme ne pose pas de problème : la limite recherchée est donc 0.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?

   $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 1$, la suite (u_n^2) est donc une suite arithmétique qui tend vers $+\infty$: la suite (u_n) tend donc elle aussi vers l'infini.

9. Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (v_n) où $v_n = \ln u_n$ est une suite arithmétique. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de celle de (v_n).

   Soit r la raison de la suite (v_n). On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{v_{n+1}-v_n} = e^r.$$

   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = e^r$.

10. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

    En posant $y = x^2 > 0$, l'équation devient $y^2 + 3y - 4 = 0$ dont la seule solution positive est $y = 1$. Les solutions réelles de l'équation considérée sont donc $x = 1$ et $x = -1$.

Exercice 2

1. On considère la fonction de la variable réelle

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

   Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies.

   f est définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$. Par croissance comparée, sa limite à droite de 0 vaut $-\infty$, et il est immédiat sa limite à gauche de 1 vaut $-\infty$, sa limite à droite en 1 vaut $+\infty$, et sa limite

en $+\infty$ est 0. On en déduit que le graphe de f admet les asymptotes verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$, ainsi que l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
La dérivée de f vaut

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

qui est donc nulle en $1/e$, positive si $x < 1/e$, et négative si $x > 1/e$. On complète le tableau de variations en remarquant que $f(1/e) = -e$

2. En vous aidant de la question précédente, montrer que la fonction

$$F(x) = \ln(-\ln(x))$$

est une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbf{R}$

Comme $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$, F est bien définie et continue sur $]0, 1[$ et on trouve que $F' = f$. D'après la question précédente, le maximum de f sur $]0, 1[$ est $-e < 0$, donc F est strictement décroissante sur cet intervalle. Enfin, on trouve directement que

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} F(x) = -\infty$$

d'où le résultat.

3. Trouver le point x tel que $F(x) = 0$ et écrire l'équation de la tangente en x du graphe de F. Quelle propriété remarquable le graphe a-t-il en ce point ?

Le point en question est $1/e$. Comme $f(1/e) = -e$, l'équation recherchée est

$$y = -e\left(x - \frac{1}{e}\right) = -ex + 1.$$

Enfin, on a vu que f' s'annule en $1/e$ en y changeant de signe : il s'agit donc d'un point d'inflexion de la courbe représentatrice de F.

4. Tracer le graphe de F.

Il se déduit des questions précédentes.

5. Montrer qu'il existe un unique réel $y \in]0, 1[$ tel que $F(y) = y$.

Entre 0 et 1, la fonction $G(x) = F(x) - x$ est continue et décroit strictement de $+\infty$ à $-\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule donc en un point unique, d'où le résultat.

Exercice 3 Soit a un nombre réel. Le but de l'exercice est de déterminer, selon la valeur de a, le nombre de solutions de l'équation

$$e^{ax} = x + a \tag{1}$$

1. Répondre à la question posée quand $a = 0$.

Dans ce cas, l'équation s'écrit $1 = x$ et donc elle admet l'unique solution $x = 1$!

2. On suppose $a < 0$. Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = e^{ax} - x - a$, et en déduire le nombre de solutions de l'équation (1) dans ce cas.

   $f'(x) = ae^{ax} - 1 < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Il est immédiat que

   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

   et donc f s'annule en un unique point x_0, qui est l'unique solution de l'équation (1) dans ce cas.

3. On suppose désormais que $a > 0$.

   (a) Montrer que la fonction f admet un unique minimum m en un point x_0 qu'on déterminera. Donner l'expression de m en fonction de a.

   On a $f'(x) = 0$ ssi $x = -\ln a/a$, $f'(x) > 0$ ssi $x > -\ln a/a$ et $f'(x) < 0$ ssi $x < -\ln a/a$ d'où le résultat demandé avec $x_0 = -\ln a/a$ et $m = (1 + \ln a - a^2)/a$.

   (b) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction

   $$g(y) = 1 + \ln y - y^2$$

   et montrer que g admet un maximum strictement positif au point $y_0 = \sqrt{2}/2$.

   g est bien définie sur $]0, +\infty[$, avec une asymptote verticale en 0 et une branche parabolique dans la direction verticale en $+\infty$. Un calcul de dérivée immédiat prouve que g admet son maximum au point indiqué. Enfin, $g(\sqrt{2}/2) = 1 - \ln 2/2 - 1/4 > 1 - 0,35 - 0,25 = 0,4 > 0$ en utilisant le rappel fait au tout début de l'énoncé.

   (c) En déduire que l'équation $g(y) = 0$ admet deux solutions. L'une d'entre elles est évidente, placer la seconde (qu'on notera α) par rapport à $\sqrt{2}/2$.

   Comme $g(y)$, qui est une fonction continue, tend vers $-\infty$ aux deux bornes de son domaine de définition, son graphe coupe l'axe des x une fois avant $\sqrt{2}/2$ et une fois après. Par ailleurs, $y = 1$ est une solution évidente de l'équation $g(y) = 0$, et par suite $\alpha < \sqrt{2/2}$.

   (d) Déduire de ce qui précède le signe de m en fonction de la valeur de a, puis le nombre de solutions de l'équation (1).
   Comme $m = -(1 + \ln a - a^2)/a$ avec $a > 0$, $m = -g(a)$ et est donc
   — négatif si $0 < a < \alpha$ ou $a > 1$: dans ce cas, f s'annule deux fois et l'équation (1) admet deux solutions ;
   — positif si $\alpha < a < 1$: dans ce cas, f ,ne s'annule pas et l'équation (1) n'admet pas de solution ;
   — nul si $a = \alpha$ ou $a = 1$: dans ce cas, f s'annule uniquement au point $x_0 = -\ln a/a$.

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout réel positif x, $\ln x \leq x/e$.

   Un rapide calcul de la dérivée de la fonction

   $$f(x) = \ln x - \frac{x}{e}.$$

   montre que cette fonction atteint son maximum au point e, et que ce maximum vaut 0.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx.$$

Calculer I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3 - 1}{3};$$

Par ailleurs, une intégration par parties prouve que

$$\begin{aligned} I_1 = \int_1^e x^2(\ln x) dx &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9}. \end{aligned}$$

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.

Pour $1 < x < e$, $0 < \ln x < 1$, donc $(\ln x)^n > (\ln x)^{n+1}$ pour tout entier n : on en déduit que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante ; comme par ailleurs $x^2(\ln x)^n > 0$, on en déduit que $I_n > 0$, et la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est minorée : elle est donc convergente.

4. En utilisant la question 1., montrer que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

D'après la question 1.,

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n dx \\ &= \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{2+n} dx \\ &= \frac{1}{e^n} \frac{e^{n+3} - 1}{n + 3} \\ &\leq \frac{e^3}{n + 3}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tendant vers 0 avec n, la positivité de I_n permet de conclure via le théorème "des gendarmes".

5. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$I_{n+1} = -\frac{n + 1}{3} I_n + \frac{e^3}{3}.$$

Par intégration par parties, en prenant $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = x^2$, il vient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \frac{n+1}{3} \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n. \end{aligned}$$

6. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} n I_n = e^3.$$

De la question précédente, on tire que

$$n I_n = \frac{3n}{n+1} \left(-I_{n+1} + \frac{e^3}{3} \right)$$

et le résultat s'ensuit dès qu'on se souvient que $I_{n+1} \to 0$.

Exercice 5 Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres réels vérifiant le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z_1 + z_2 + z_3 & = & 1 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 & = & 7 \\ z_1 z_2 z_3 & = & 1 \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Montrer que $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -3$.

   On part de

   $$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)$$

   et en reportant les valeurs des deux premières équations du système on aboutit directement au résultat demandé.

2. Ecrire $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$ sous la forme $x^3 + ax^2 + bx + c$.
   En développant, on trouve l'expression demandée avec $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ et $c = -z_1 z_2 z_3$.
3. En déduire les solutions du système (2).
   D'après la question précédente, z_1, z_2 et z_3 sont donc racines de l'équation $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$. -1 étant une racine évidente de cette équation, il vient $x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x+1)(x^2 - 2x - 1) = (x+1)(x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$.
   Les solutions du système (2) sont donc les triplets qui s'obtiennent par une permutation interne de $(-1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

Exercice 6 On considère l'équation

$$z^4 = -4 \tag{3}$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est une solution de l'équation (3), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de cette équation.

   $(-z)^4 = z^4$ donc $-z$ est solution de cette équation. De plus, $\overline{z}^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$.

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Ecrire z_0 sous forme trigonométrique.

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3. Montrer de deux façons différentes que z_0 est solution de l'équation (3).

   on peut calculer directement

$$(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$$

   ou en passant par la forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \\ &= -4 \end{aligned}$$

4. Donner trois autres solutions de l'équation (3).

   D'après la première question, $-z_0$, $\overline{z_0}$ et donc $-\overline{z_0}$, c'est-à-dire $-1-i$, $1-i$ et $-1+i$ sont également solutions de l'équation (3).

Exercice 7 Une urne contient 8 boules blanches, 8 boules rouges et 8 boules noires. Pour tout entier k compris entre 1 et 8, une boule de chaque couleur porte le numéro k. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité d'avoir sorti les boules blanches numérotées 1, 2 et 3.

   Il y a $\binom{24}{3}$ possibilités de tirer 3 boules parmi les 24 que contient l'urne. Un seul de ces tirages correspond au trois premières boules blanches, et la probabilité cherchée est donc $1/\binom{24}{3} = 1/1224$.

2. En déduire la probabilité d'avoir sorti trois boules non nécessairement de la même couleur, mais portant trois numéros consécutifs.

   Les séquences de nombres possibles vont de (1,2,3) à (6,7,8), il y en a donc 6. Pour chacune de ces séquences, chaque boule peut être de 3 couleurs différentes, il y a donc 27 possibilités de couleurs. La probabilité cherchée est donc $162/\binom{24}{3} = 81/1012$.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^2 \, Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

On peut prolonger la fonction par zéro à l'origine. La dérivée de la fonction est égale à : $f'(x) = x(2Ln\,x + 1)$ et elle s'annule pour $x = 1/\sqrt{e}$. Le graphe de f admet une branche parabolique dans la direction verticale. De plus on a : $f(1) = 0$ et $\underset{0}{Lim}\, f'(x) = 0$

x	0 $\qquad$ $1/\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	0 $\searrow$ - 1/2e	$\nearrow$ $+\infty$

2. Etudier la convexité de la fonction f.

La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = 2Ln\,x + 3$ qui s'annule pour $x = e^{-3/2}$. La fonction est convexe pour $x \geq e^{-3/2}$ et concave dans le cas contraire.

3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\,dx$

On procède par intégration par parties en posant : $u' = x^2 \,; v = Ln\,x$ et on obtient :

$$I = \int_1^e f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} Ln\,x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{1+2e^3}{9}$$

4. Calculer $I_n = \int_1^e x^n \, Ln(x)\,dx$ pour tout entier supérieur à 1.

On procède encore par intégration par parties en posant : $u' = x^n \,; v = Ln\,x$ pour obtenir :

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} Ln\, x\right]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\, dx = \frac{1+ne^{n+1}}{(n+1)^2}$$

5. Déterminer la valeur du nombre réel α pour laquelle $\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n^\alpha I_n}{e^n} = l$, où l est un nombre réel non nul.

On a : $\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n^\alpha I_n}{e^n} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n^\alpha (ne^{n+1}+1)}{e^n (n+1)^2} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n^{\alpha+1} e + n^\alpha e^{-n}}{n^2} = \underset{n\to\infty}{Lim}\, n^{\alpha-1} e$ et cette limite est égale à e pour $\alpha = 1$

Exercice n° 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie sur $[-1,1]$ et elle est paire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe Oy. Sa dérivée est égale à $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ et la fonction est décroissante sur $[0,1]$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

On a $I = 2\int_0^1 f(x)\, dx$ et en posant $x = \sin u$, on obtient

$$I = 2\int_0^1 \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2u)\, du = \left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = (1+x)^2 e^{-x}$.

1. Etudier la convexité de f.

On obtient $f'(x) = e^{-x}\left[2(1+x) - (1+x)^2\right] = (1-x^2)e^{-x}$ et $f''(x) = e^{-x}\left[x^2 - 2x - 1\right]$

La dérivée seconde s'annule pour $x = 1 \pm \sqrt{2}$ et la fonction est convexe sur $\left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2}, +\infty\right[$

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

Cette fonction est toujours positive et nulle en -1. Elle admet une branche parabolique dans la direction Oy quand $x \to -\infty$ et l'axe Ox comme asymptote quand $x \to +\infty$. La fonction est décroissante sur $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ et croissante entre -1 et 1, avec $f(-1) = 0; f(1) = 4/e$

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

La fonction *f* admet une primitive *F* de la forme : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ et en identifiant les coefficients, on obtient : $F(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$, d'où $I = F(1) - F(0) = \dfrac{-10 + 5e}{e} > 0$

4. Pour *n* entier strictement supérieur à 1, on pose $f_n(x) = (1+x)^n e^{-x}$. Etudier, selon les valeurs de *n*, les variations de f_n et tracer son graphe.

La dérivée vaut $f_n^{'}(x) = (1+x)^{n-1} e^{-x}(n-1-x)$ qui s'annule pour $x = -1$ et $x = n-1$;
On peut remarquer que l'expression $(1+x)^{n-1}$ dans la dérivée change de signe pour *n* pair mais ne change pas si *n* est impair pour 1 + x < 0 .
Si *n* est pair, la fonction est décroissante sur $]-\infty, -1[$, croissante sur $]-1, n-1[$ et décroissante sur $]n-1, +\infty[$
Si *n* est impair, la fonction est croissante sur $]-\infty, -1[$, croissante sur $]-1, n-1[$ et décroissante sur $]n-1, +\infty[$
Dans tous les cas, on a une branche parabolique dans la direction verticale à $-\infty$, et l'axe Ox est asymptote à $+\infty$

5. Résoudre l'équation $f_n(x) = e^x$ pour *n* >2 et x >-1.

Il faut résoudre $(1+x)^n e^{-x} = e^x$ ou encore $(1+x)^n = e^{2x}$ et par passage au logarithme $y = n\,Ln(1+x) - 2x = 0$

On obtient : $y^{'} = \dfrac{n}{1+x} - 2$ qui est nulle pour $x = \dfrac{n-2}{2}$. Posons $a_n = n\,Ln(n/2) - (n-2) > 0$

La fonction *y* est strictement croissante et continue de $\left]-1, \dfrac{n-2}{2}\right[$ sur $]-\infty, a_n[$, elle est donc bijective et 0 est la seule valeur qui annule *y*.

La fonction *y* est strictement décroissante et continue de $\left]\dfrac{n-2}{2}, +\infty\right[$ sur $]a_n, -\infty[$, elle est donc bijective et admet une unique valeur (qui dépend de *n*) qui annule *y*.

Exercice n° 4

Soit *f* la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par :

$f(-1) = f(1) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ pour $x \in]-1,1[$

1. Etudier la dérivabilité de *f* en $x = 1$ et $x = -1$.

La fonction étant paire, il suffit d'étudier la dérivabilité en $x = 1$

On a : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{x-1} = \lim\limits_{u \to +\infty} (u\,e^{-u/2}) = 0$, en posant u = 1/(1-x), u tend vers +∞,et la fonction est dérivable.

2. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La dérivée de *f*, pour $x \in \left]-1,1\right[$, est égale à : $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} f(x)$ avec $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$

La fonction est donc strictement décroissante sur $[0,1]$ et son graphe symétrique par rapport à l'axe Oy.

3. Résoudre l'équation $f(x) = e^x$

On doit résoudre : $\dfrac{x^2}{x^2-1} = x$, soit $x^3 - x^2 - x = 0$, à savoir $x = 0$ et $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mais $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, donc on a que deux solutions : $x = 0$ et $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Exercice n° 5

Soit a un nombre réel fixé supérieur ou égal à 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \left]0,1\right]$ et la relation dé récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{a} + \dfrac{u_n^2}{a^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée

Il est évident par récurrence que la suite est toujours positive.

Comme $u_0 \leq 1$, on vérifie par récurrence que pour tout n, $u_n \leq 1$;

En effet $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{a} + \dfrac{u_n^2}{a^2} \leq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ et cette expression sera inférieure à 1 si $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} \leq 1$, à savoir $a^2 - a - 1 \geq 0$, ce qui est vérifié puisque $a \geq 2$

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Comme la suite est à termes positifs, on peut considérer le rapport : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{u_n}{a^2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} < 1$

donc la suite est décroissante.

3. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n)

Comme cette suite est minorée et décroissante, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l = \dfrac{l}{a} + \dfrac{l^2}{a^2}$, d'où $l = 0$ ou $l = a(a-1)$. ~~?~~ Comme la suite est décroissante, elle converge vers 0.

4. On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{4} + \dfrac{3}{4}$ et $v_0 \in \left]1,2\right]$

Etudier la convergence de la suite (v_n) (On pourra suivre la même démarche que pour la suite précédente (u_n)).

On vérifie par récurrence que la suite est bornée : $1 < v_n \leq 2$

On a : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4}(v_n-1)(v_n-3)$. Comme $1<v_n\leq 2$, le premier terme est positif et le second est négatif, la suite est donc décroissante.
Comme cette suite est minorée et décroissante, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l=\frac{l^2}{4}+\frac{3}{4}$, d'où $l=1$ ou $l=2$. Comme la suite est décroissante, elle converge vers 1.

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

1. La fonction *f* est-elle prolongeable par continuité à droite en zéro ?

On a : $\underset{0^+}{Lim}\, f(x)=\underset{0^+}{Lim}\frac{1+\frac{1}{2}x-1}{x}=\frac{1}{2}$, donc on peut prolonger f par continuité en posant $f(0)=1/2$

2. La fonction *f* est-elle dérivable à droite en zéro ?

On a au voisinage de zéro : $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, d'où

$\underset{0^+}{Lim}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\underset{0^+}{Lim}\frac{2(\sqrt{1+x}-1)-x}{x^2}=\underset{0^+}{Lim}\frac{2(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-1)-x}{x^2}=-\frac{1}{8}$, donc la fonction est dérivable à droite en zéro.

3. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.
On remarque que $f(x)>0$ et que $\underset{+\infty}{Lim}\, f(x)=0$, donc l'axe Ox est une asymptote au graphe de *f*. La dérivée de *f* est égale à : $f'(x)=\frac{2\sqrt{1+x}-(2+x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$ et cette dérivée est du signe de $u(x)=2\sqrt{1+x}-(2+x)$. On a : $u'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1<0$, donc u est strictement décroissante sur R^+ à valeurs dans R^-, donc u est négative et f' aussi. La fonction *f* est décroissante de ½ à zéro.

4. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$

On remarque que $u_n=f(1/n)$ et donc $\underset{n\to\infty}{Lim}\, u_n=\underset{x\to 0}{Lim}\, f(x)=1/2$, la suite est donc convergente vers 1/2
On peut aussi calculer directement la limite en multipliant par la quantité conjuguée.