Avril 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Exercice.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(X) = (1-X)(3-X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$

D'après le Théorème de Caley Hamilton, $(A - 2I_2)^2 = 0$ donc $A - 2I_2$ est nilpotente.

2. Posons $B = A - 2I_2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{tA} = e^{2t}e^{tB} = e^{2t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!} = e^{2t}\left(I_2 + tB + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^nB^n}{n!}\right) = e^{2t}\left(I_2 + tB\right).$$

Car $B^2 = 0$, ce qui implique $B^n = 0$, $\forall n \geq 2$.

3. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, notre système d'équations se réécrit sous la forme matricielle

$$X'(t) \;=\; AX(t) \quad \text{avec condition initiale} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cette équation différentielle homogène de première ordre admet pour unique solution, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Simplifions cette dernière expression.
Soit $t \in \mathbb{R}$. $e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}(I_2 + tB)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + tB\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix}$.
Conclusion : l'unique couple solution est le couple $(t \mapsto e^{2t}(1-3t); t \mapsto e^{2t}(2+3t))$.

Problème.

Partie I

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ de la variable complexe z, où s est un nombre réel donné.

1. Posons $a_n = n^{-s}$, $n \geq 1$. On a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = 1.$$

On déduit de la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de la série entière est $R = 1$.

2. Si $s > 1$, $|n^{-s}z^n| = n^{-s}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ est une série à termes positifs convergente car $s > 1$ (règle de Riemann). La convergence absolue de la série entraine donc sa convergence.
Si $s \leq 0$, $|n^{-s}z^n| = n^{-s} \geq 1$. La suite $(n^{-s}z^n)$ ne tend pas vers 0 et la série diverge.

3. Pour $z = 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ diverge car $s < 1$ (règle de Riemann).

4. On suppose toujours que question que $0 < s \leq 1$ et $z = e^{i\theta} \neq 1$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$.

   (i) S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$. Donc $S_n = z\dfrac{1-z^n}{1-z}$. Ce qui donne par l'inégalité triangulaire $\left|S_n\right| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$. Or $1 - z = (1 - \cos(\theta)) + i\sin(\theta)$ et $|1-z| = \sqrt{(1-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} = \sqrt{2 - 2\cos(\theta)} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)}$.
   D'où $|S_n| \leq \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$.

   (ii) On a $z^k = S_k - S_{k-1} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^k = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, S_k - \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^{k-1}$, puis par changement d'indices, $\sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^k = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, S_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{-s}\, z^{k-1}$. En regroupant les termes de même indice, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right] + S_n\, n^{-s}.$$

   (iii) D'après la question précédente, la suite (S_n) est bornée, comme $s > 0$, $\lim_{n \to +\infty} n^{-s} S_n = 0$. D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left|S_k\left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right]\right| &\leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \sum_{k=1}^{n} \left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right] \\ &= \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}\left(1 - (n+1)^{-s}\right), \end{aligned}$$

   comme $\lim_{n \to +\infty} (n+1)^{-s} = 0$, la dernière inégalité prouve que $\sum_{k=1}^{n} S_k\left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right]$ est une série absolument convergente, donc convergente.
   Conclusion : la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ est convergente.

Nous noterons dorénavant $\varphi(z, s)$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ pour tout couple $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ pour lequel cette série est convergente :

$$\varphi(z, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n\,. \tag{1}$$

5. On note I l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ de $\mathbb{R}$.

(a) Posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t} dt$. On utilise les résultats sur les séries entières : la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\varphi(t,s)}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, t^{n-1}$ a un développement en série entière de rayon de convergence $R = 1$ et on cherche une primitive F de f telle que $F(0) = 0$. On sait que dans le disque de convegence, toute primitive de f a un développement en série entière $F(x) = F(0) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\,\frac{x^n}{n} = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\, x^n = \varphi(x, s+1)$. On aboutit au résultat demandé car $F(0) = 0$.

Remarque : On pourrait aussi utiliser l'intégration terme à terme d'une série de fonction.

(b) $\varphi(x,0) = 0$ et $\varphi(x,1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

6. On suppose dans cette question que $s > 1$. Pour $s > 1$, on définit $\Gamma(s)$ par l'intégrale $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$.

(i) On calcule $\Gamma(2)$ en utilisant une intégration par parties : on pose $u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1$, $v(t) = -e^{-t} \Rightarrow v'(t) = e^{-t}$ et on obtient

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1\,.$$

(ii) Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(t) = e^{-nt}\, t^{s-1}$.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ en particulier au point 0, car $s - 1 > 0$, il suffit alors de vérifier que f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Puisque $n \geq 1$, au voisinage de $+\infty$, $f_n = O(1/t^2)$; or $t \mapsto 1/t^2$ est positive est intégrable sur tout intervalle de type $[a, +\infty[$, $a > 0$. Soit $a > 0$, f_n est intégrable sur $[a, +\infty[$, continue sur $[0, a]$, donc intégrable sur $[0, +\infty[$.
Pour calculer l'intégrale de f_n, on effectue le changement de variables affine $u = nt$, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^{s-1} \frac{du}{n}\, du = \frac{1}{n^s}\Gamma(s)\,.$$

(iii) Soit z un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = z^n f_n(t)$. Montrons que les hypothses du théorème d'interversion série-intégrale sont satisfaites :
• Pour tout $n \geq 1$, u_n est continue sur $[0, +\infty[$ et $|u_n| = |z^n f_n| \leq |f_n|$. D'après la question précédente, u_n est intgrable sur $[0, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
• $u_n(t) = \left(ze^{-t}\right)^n t^{s-1}$ qui est une suite géométrique de raison $r = ze^{-t}$ telle que $|r| \leq e^{-t} < 1$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Donc la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(t) = ze^{-t} t^{s-1} \dfrac{1}{1 - ze^{-t}}$.
• g est continue sur $]0, +\infty[$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = |z^n| \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \leq \frac{\Gamma(s)}{n^s}$; il s'en suit par la règle de Riemann que $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt$ converge car $s > 1$.

On peut alors utiliser le théorème d'interversion série-intégrale : la fonction g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt.$
Soit

$$z\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}t^{s-1}}{1-ze^{-t}}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\varphi(z,s)\,.$$

En multipliant numérateur et dénominateur dans l'intégrale par e^t, on obtient la formule demandée :

$$\varphi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-z}\,dt.$$

Partie II

Pour tout nombre réel $s>1$, on pose $\zeta(s)=\varphi(1,s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$, où φ a été définie dans la partie **I** pa la formule (1).

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'application $h_n :]1,+\infty[$ définie par $h_n(s)=\dfrac{1}{n^s}=e^{-s\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et pour tous $k\in\mathbb{N}$ et $s\in]1,+\infty[$, $h_n^{(k)}(s)=\dfrac{\big(-\ln n\big)^k}{n^s}$.
Soit $1<a<+\infty$ fixé. Puisque la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(\ln n\big)^k}{n^a}$ est convergente, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} h_n^{(k)}$, $k\geq 1$ sont normalement, donc uniformément convergentes sur $[a,+\infty[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, il en résulte que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ et que $\zeta^{(k)}(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^s}$ pour tout $s\in]a,+\infty[$. Comme $1<a<+\infty$ est arbitraiment pris, on en déduit que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et que $\zeta^{(k)}(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^s}$ pour tout $s\in]1,+\infty[$.

2. D'après la question précédente, la fonction ζ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et
$$\zeta'(s) = -\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^s}<0\,.$$
Donc la fonction ζ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

3. On utilise une comparaison entre série et intégrale : en considérant la fonction $t\to\dfrac{1}{t^s}$ sur l'intervalle $[k,k+1[$ $(k\geq 1)$, on a $\dfrac{1}{\big(k+1\big)^s}\leq\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t^s}dt\leq\frac{1}{k^s}$. D'où, en additionnant ces inégalités membre à membre $(k=1,\cdots,k=n)$ on obtient,
$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^s}\leq\int_1^{n+1}\frac{1}{t^s}dt\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}\,.$$

La fonction $t \mapsto t^{-s}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ (l'intégrale sur $]1,+\infty[$ est de même nature que la série $\zeta(x)$). Lorsque $n \to +\infty$, on obtient $\zeta(s) - 1 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-s}dt \leq \zeta(s)$. De plus $\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-s} \geq 0$ ce qui complète l'encadrement

$$0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s}dt \leq \zeta(s). \tag{2}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-s}dt = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{s-1}$, ce qui donne $1 \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$. Losque $s \to +\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

De même, en multipliant par $s-1 > 0$ tous les membres de l'inégalité (2), on obtient $0 \leq (s-1)\zeta(s) - (s-1) \leq 1 \leq (s-1)\zeta(s)$. Losque $s \to +\infty$, on oboutit à $\lim_{s\to1}(s-1)\zeta(s) = 1$ soit $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$ au voisinage de 1.

Partie III

1. Soit g la fonction de la variable réelle x définie par :

$$(i) \quad g(x) = \left(\tfrac{\pi-x}{2}\right)^2 \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi[$$

$$(ii) \quad g \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

a- Comme g est périodique de période 2π, il suffit de montrer qu'elle est paire sur $[-\pi, \pi]$. Or pour tout $x \in [-\pi, 0[$, $x + 2\pi \in [0, 2\pi[$ et $-x \in]0, \pi]$, ce qui implique

$$g(x) = g(x + 2\pi) = \left(\frac{\pi + x}{2}\right)^2 = g(-x).$$

D'où la parité de g.

b- La fonction g est continue sur $[0, 2\pi]$ et périodique, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Calculons sa série de Fourier. g étant paire ses coefficients $b_n(g) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\,dt = 0$ et $a_n(g) = \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(t-\pi\right)^2\cos(nt)\,dt$. Pour $n \geq 1$, on effectue une double intégration par parties.

- Première intégration par parties : on pose $U = (t-\pi)^2 \Rightarrow U' = 2(t-\pi)$, $V' = \cos(nt) \Rightarrow V = \frac{1}{n}\sin(nt)$,

$$a_n(g) = \frac{1}{2\pi}\Big[(t-\pi)^2\frac{1}{n}\sin(nt)\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2(t-\pi)\sin(nt) = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)dt\,.$$

- Deuxième intégration par parties : on pose $X = (t-\pi) \Rightarrow X' = 1$, $Y' = \sin(nt) \Rightarrow Y = -\frac{1}{n}\cos(nt)$,

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{n\pi}\Big[(t-\pi)\frac{1}{n}\cos(nt)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2\pi}\Big[\sin(nt)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}\,. \end{aligned}$$

Il reste à calculer $a_0(g) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\pi\right)^2 dt = \frac{\pi^2}{6}$.

c- g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux. On peut alors appliquer le théorème de Dirichlet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(nt)$ et en particulier, pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$g(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nt) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2. \tag{3}$$

d- En prenant $t = 0$ dans la relation (3), on a $\dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{12} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, ce qui donne

$$\zeta(2) \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ = \ \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour calculer $\zeta(4)$, on utilise l'inégalité de Parseval : puisque g est continue et l'intervalle fermé sur $[0, 2\pi]$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(g(t)\big)^2\,dt \ < \ +\infty$, comme de plus elle est 2π-périodique, par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^4 dx \ = \ \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi} \big(\pi - x\big)^4 dx \ = \ \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n(g)\big)^2$$

car g est 2π-périodique et paire. En effectuant dans l'intégrale le changement de variable $u = \pi - x$, on obtient

$$\frac{\pi^2}{12^2} + \frac{1}{2}\zeta(4) = \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi} u^4 du = \frac{\pi^4}{80},$$

ce qui donne

$$\zeta(4) \ = \ \frac{\pi^4}{90}\,.$$

2. Soit θ un nombre réel. On note $\mathrm{Re}(\varphi(\theta))$ la partie réelle de $\varphi(e^{i\theta}, 2)$ où φ est la fonction définie à la question I.2.

a- On a

$$R_\varphi(\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}(e^{in\theta})}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}\,.$$

b- D'après la formule de la question **I**.6.(iii)

$$\begin{aligned} R_\varphi(\theta) = \mathrm{Re}(\varphi(\theta, 2)) &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - e^{i\theta}}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{t\,e^{i\theta}}{e^t - e^{i\theta}}\right)\,dt. \end{aligned}$$

Considérons la fonction dans l'inégrale, en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, on a

$$\frac{t\,e^{i\theta}}{e^t - e^{i\theta}} = \frac{t\,e^{i\theta}\big(e^t - e^{-i\theta}\big)}{\big(e^t - e^{i\theta}\big)\big(e^t - e^{-i\theta}\big)} = \frac{t\left(e^{t+i\theta} - 1\right)}{e^{2t} - 2e^t\cos\theta + 1}\,.$$

La partie réelle du membre de droite de cette dernière égalité est $\dfrac{t\left(e^t\cos\theta - 1\right)}{e^{2t} - 2e^t\cos\theta + 1}$. D'autre part, d'après la question **I**.6.(i), $\Gamma(2) = 1$. On obtient donc

$$R_\varphi(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^t\cos\theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t\cos\theta + 1}\,dt = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

c- On calcule I_1 et I_2 en donnant des valeurs particulières à θ :

• Pour $\theta = 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\big(e^t - 1\big)}{e^{2t} - 2e^t + 1}\, dt = \frac{\pi^2}{6}$,
or $\displaystyle\frac{t\big(e^t - 1\big)}{e^{2t} - 2e^t + 1} = \frac{t\big(e^t - 1\big)}{\big(e^t - 1\big)^2} = \frac{t}{e^t - 1}$. D'où $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \frac{\pi^2}{6}$.

• De la même manière, pour $\theta = \pi$, on a $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\big(e^t + 1\big)}{e^{2t} + 2e^t + 1}\, dt = -\frac{\pi^2}{12}$, et $\displaystyle\frac{t\big(e^t + 1\big)}{e^{2t} + 2e^t + 1} = \frac{t\big(e^t + 1\big)}{\big(e^t + 1\big)^2} = \frac{t}{e^t + 1}$. D'où $I_2 = \displaystyle\frac{\pi^2}{12}$.

d- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{e^t + 1} = \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}$; ainsi $I_3 = I_1 + I_2 = \displaystyle\frac{\pi^2}{4}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Les exercices sont indépendants. Dans toute la composition, *R* désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* définie sur R^+ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La dérivée est égale à (pour *x* non nul): $f'(x) = \dfrac{1}{2(1+x)^2\sqrt{x/(x+1)}} > 0$

La fonction est continue et strictement croissante de R^+ sur $[0,1[$, elle admet la droite *y*=1 comme asymptote, une tangente verticale à l'origine et elle est concave.

2. Pour *x*>0 et tout entier naturel *n*, on pose : $u_n(x) = \sqrt{\dfrac{x^n}{x+1}}$. Etudier la suite $(u_n(x))$ selon les valeurs de *x*.

On obtient :

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<1 \\ 1/\sqrt{2} & si\ x=1 \\ +\infty & si\ x>1 \end{cases}$$

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

On pose $t = \sqrt{x+1}$, d'où $dx = 2t\,dt$ et $x = t^2 - 1$ pour obtenir $I = 2\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2-1}\ dt$

Puis on pose $t = ch\,u$ pour obtenir : $I = \int_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} sh^2(u)\,du$ (on rappelle que $ch^2(u) - sh^2(u) = 1$, $shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ et $Argchu = Ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$).

Puis

$$I = \frac{1}{2}\int_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} (e^{2u} + e^{-2u} - 2)\,du = \left[\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{4} - u\right]_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left((\sqrt{2}+1)^2 - \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}\right) - Ln(1+\sqrt{2})$$

Après simplification, on obtient : $I = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} - Ln(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} - Ln(1+\sqrt{2})$

Autre méthode : On pose $t = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, d'où $x = \frac{t^2}{1-t^2}$ et $d\,x = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt$.

Puis $I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}\,dt = \int_0^{1/\sqrt{2}} t \times \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt$ que l'on intègre par parties en posant : $u = t \ \ et\ \ v' = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$ pour obtenir

$$I = \left[\frac{t}{1-t^2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} - \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)}\,d\,t = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) d\,t = \sqrt{2} - \frac{1}{2} Ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \sqrt{2} - Ln(1+\sqrt{2})$$

Exercice n° 2

Pour $a \in R$, on définit la matrice $M\,(a)$, carrée d'ordre 3, par : $M\,(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour $b \in R$, calculer le produit $M(a)M(b)$

On obtient $M(a)M(b) = M(a+b)$

2. Pour tout entier naturel n, calculer $M^n(a)$

On déduit de la question précédente que : $M^2(a) = M(2a)$ et par récurrence que $M^n(a) = M\,(na)$

3. La matrice $M\,(a)$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Soit $b=-a$, on a : $M(a)M(-a)=M(0)=I$, donc la matrice est inversible et $M^{-1}(a)=M(-a)$

4. La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser sa matrice diagonale semblable.

On a de façon triviale $\det(M(a)-\lambda I)=(1-\lambda)^3$ et $\lambda=1$ est une valeur propre triple. La matrice sera diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé est égale à 3, ce qui est possible seulement pour a=0 et la matrice unité est la matrice diagonale semblable.

Exercice n° 3

Pour $t\in R$, on définit la matrice $M_t=\begin{pmatrix}1 & t & t^2\\ t & t^2 & t^3\\ t^2 & t^3 & t^4\end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de M_t

On peut remarquer que les 3 colonnes sont dépendantes, donc zéro est une valeur propre double.

Le déterminant de $M_t-\lambda I$ est donc de la forme : $-\lambda^2(\lambda-a)$. La trace étant invariante par changement de base, on obtient comme troisième valeur propre : $1+t^2+t^4$

2. On justifiera la réponse à chacune des questions suivantes /

- M_t est-elle diagonalisable ? Oui, car symétrique
- M_t est-elle inversible ? Non, car des colonnes dépendantes
- M_t peut-elle être associée à une projection orthogonale dans R^3 ? Pour une matrice de projection orthogonale 0 et 1 sont des valeurs propres. Comme 0 est une valeur propre double, cela ne peut être qu'une projection orthogonale sur une droite à condition que : $1+t^2+t^4$ soit égal à 1. Il faut donc $t=0$ et on a une projection orthogonale sur l'axe Ox, dont la matrice est

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- M_t peut-elle être associée à une symétrie dans R^3 ? Non, car -1 ne peut pas être une valeur propre.

3.On considère la suite de matrices $(M_n(t))$ définie par :

$$M_1(t)=M_t \text{ et } M_n(t)=\begin{pmatrix}1 & t^n & t^{n+1}\\ t^n & t^{n+1} & t^{n+2}\\ t^{n+1} & t^{n+2} & t^{n+3}\end{pmatrix}$$

Etudier cette suite.

Si t=1, la suite est constante $M_n(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Si $|t|<1$, la suite est convergente vers P

Dans les autres cas, la suite est divergente.

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur R par : $f(x)=\sqrt{1+x^2}\,Ln(1+x^2)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est paire et il suffit donc de l'étudier sur R^+ et son graphe est symétrique par rapport à l'axe Ox. Sa dérivée est égale est : $f^{'}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(Ln(1+x^2)+2)$. Cette dérivée est positive et la fonction est strictement croissante de R^+ sur R^+. Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy et la pente de la tangente à l'origine est horizontale.

2. Calculer $I=\int_0^1 x\,f(x)\,dx$

$I=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,Ln(1+x^2)\,dx$ et on fait une intégration par parties, en posant $u^{'}=x\sqrt{1+x^2}$ et $v=Ln(1+x^2)$. D'où

$$I=\left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\,Ln(1+x^2)\right]_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}\,Ln2)-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

Et $I=\dfrac{1}{3}(2\sqrt{2}\,Ln2)-\dfrac{2}{9}(2\sqrt{2}-1$

3. Résoudre l'équation : $f(x)=1+x^2$

Il faut résoudre : $Ln(1+x^2)=\sqrt{1+x^2}$, puis en posant $u=\sqrt{1+x^2}$, il faut résoudre l'équation : $z=Lnu-\dfrac{1}{2}u=0$; La dérivée de z est égale à $z^{'}=\dfrac{2-u}{u}$ qui s'annule pour u=2 et qui admet un maximum négatif en cette valeur, donc la fonction z est toujours strictement négative et l'équation n'admet pas de racines.

Exercice n° 5

Pour n entier strictement positif, on considère : $f_n : [0,1] \to R$ définie par $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$

1. Etudier la monotonie f_n

On a : $f_n^{'}(x) = n\,x^{n-1} + 2(1-x) > 0$, car $x \in [0,1]$, la fonction est donc strictement croissante sur son domaine de définition.

2. Montrer que f_n admet une unique racine, que l'on notera α_n

On a : $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Comme f_n est continue et strictement croissante, elle est bijective, donc il existe une unique valeur α_n telle que $f_n(\alpha_n) = 0$ (on peut aussi évoquer le théorème des valeurs intermédiaires).

3. Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?

On a : $f_n(\alpha_n) = 0$, soit $\alpha_n^n = (1-\alpha_n)^2$.

Puis $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - (1-\alpha_n)^2 = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n = \alpha_n^n(\alpha_n - 1) < 0$

4. On considère la suite de terme général α_n

- Montrer que la suite (α_n)

Comme f_n est une bijection croissante, on a : $0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n) \Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$. La suite est donc croissante et comme elle est majorée par 1, elle est convergente vers une valeur α

- Déterminer la limite de la suite (α_n)

La suite étant croissante, on a : $0 < \alpha_n < \alpha$ et $0 < \alpha_n^n < \alpha^n$

Si $0 < \alpha < 1$, alors $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha^n = 0$ et $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n^n = 0$;

Par ailleurs, on a : $f_n(\alpha_n) = 0$, soit $\alpha_n^n = (1-\alpha_n)^2$, donc $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n = 1 = \alpha$. Ce qui est contraire à l'hypothèse. En conclusion $\alpha = 1$.

5. Donner l'allure du graphe de f_n pour n>2 (on précisera la convexité et l'évolution du graphe quand $n \to \infty$)

On a : $f_n^{''}(x) = n(n-1)x^{n-2} - 2$ qui est nulle pour $x = \sqrt[n-2]{2/n(n-1)}$. La fonction est convexe pour $x > \sqrt[n-2]{2/n(n-1)}$ et concave dans le cas contraire sur son domaine de définition.

Quand $n \to \infty$, l'abscisse du point d'inflexion tend vers zéro, la partie convexe du graphe augmente et le graphe de f_{n+1} est en dessous de celui de f_n

6. Soit $I_n = \int_{\alpha_n}^{1} f_n(x)dx$. Calculer I_n ainsi que sa limite quand $n \to \infty$

$$I_n = \int_{\alpha_n}^{1} f_n(x)dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{3}(1-x)^3\right]_{\alpha_n}^{1} = \frac{1-\alpha_n^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{3}(1-\alpha_n)^3$$ qui tend vers zéro.

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique définie et continue sur R, vérifiant la relation suivante :

$$\forall (x,y) \in R^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

1. Etudier la monotonie de f

Pour $(x,y) \in R^2$ tel que : $f(x) = f(y)$, on a $|x-y| \leq |f(x) - f(y)| = 0$ et donc f est injective. Comme de plus elle est continue et définie sur un intervalle de R, elle est strictement monotone.

2. En supposant que f est strictement croissante, montrer que f est une bijection de R dans R.

Comme la fonction est croissante, elle admet une limite à $+\infty$, qui est soit $+\infty$ ou une limite finie l.

Si la fonction admet une limite finie, alors pour tout x nombre réel, $f(x+1) - f(x) = |f(x+1) - f(x)| \geq |x+1-x| = 1$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient : $0 = l - l \geq 1$, ce qui est faux. Par conséquent $\underset{+\infty}{Lim} f(x) = +\infty$. On peut tenir le même type de raisonnement à $-\infty$ pour obtenir $\underset{-\infty}{Lim} f(x) = -\infty$.

On en déduit que $f(R) = R$ et que la fonction continue et strictement croissante est bijective.

3. On suppose, dans cette question, qu'il existe un couple (a,b) de R^2, avec $a<b$, et tel que $f([a,b]) \subset [a,b]$

- Montrer que f admet un point fixe sur $[a,b]$

On a évidemment $f(a) \geq a,\ f(b) \leq b$. On considère l'application g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$. Cette fonction g est continue avec $g(a) \geq 0,\ g(b) \leq 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c de l'intervalle $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$, d'où $f(c) = c$.

- On suppose que f est croissante, en déduire la forme de la restriction de f à l'intervalle $[a,b]$ (qui sera notée $f_{[a,b]}$)

Soit c un point fixe de f. Du fait de la croissance de la fonction, on a $f(c) - f(a) = |f(c) - f(a)| \geq |c - a| = c - a$ et comme $f(c) = c$, alors $f(a) \leq a$, d'où $f(a) = a$

En appliquant la même démarche en b, on obtient $f(b) \geq b$ et donc $f(b) = b$

Pour tout x de $[a,b]$, on a

$f(x) - a = |f(x) - f(a)| \geq |x - a| = x - a$, d'où $f(x) \geq x$ et

$b - f(x) = |f(b) - f(x)| \geq |b - x| = b - x$, d'où $f(x) \leq x$

En conclusion f est l'application identique sur l'intervalle $[a,b]$

- On suppose *f* décroissante, déterminer $f_{[a,b]}$

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = a + b - f(x)$, g est continue et vérifie la même relation que *f*, à savoir $\forall (x, y) \in R^2, |g(x) - g(y)| \geq |x - y|$

Par ailleurs, $a \leq f(x) \leq b \Rightarrow a \leq a + b - f(x) \leq b \Rightarrow g([a,b]) \subset [a,b]$. Cette fonction étant croissante et vérifiant les hypothèses de la question précédente, on a donc $\forall x \in R \ , g(x) = x$ et par conséquent $f(x) = a + b - x$

4. On suppose que *f* est croissante.

- On suppose de plus que pour tout *x*, $f(x) < x$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit $x>0$, $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geq |x - 0| = x$, donc $f(0) + x \leq f(x) < x$ et en divisant par *x* strictement positif, on obtient : $1 + < \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{f(0)}{x}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

- Que peut-on dire si pour tout *x*, $f(x) > x$?

Soit $x<0$, $f(0) - f(x) = |f(0) - f(x)| \geq |0 - x| = -x$, donc $x < f(x) \leq x + f(0)$ et en divisant par *x*, on obtient : $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$