

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES**

Exercice 1

Partie 1

1) Le tableau de variation de g n'est pas fait ici. Mais on montre que la fonction g est décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ en étudiant la dérivée de la fonction g . On montre également que la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ est $+\infty$ et que $g(0) = 1$. En examinant le comportement de $g(x)/x$ en $+\infty$, on constate que la courbe de g admet une branche parabolique d'axe (Oy). En examinant le comportement de $g(x)/x$ en $-\infty$, on constate que la courbe de g admet la droite d'équation $y = -x$ pour asymptote oblique.

2) La question précédente montre que la fonction g est continue et strictement monotone sur \mathbb{R}^- . On a donc une bijection de \mathbb{R}^- sur l'intervalle $1, +\infty$. Comme par hypothèse, n est supérieur ou égal à 2, l'équation (En) admet une unique solution strictement négative notée r_n . Un raisonnement analogue sur \mathbb{R}^+ conclut que l'équation (En) admet une unique solution strictement positive notée t_n .

Partie 2

Dans cette partie, on note (u_n) , n appartenant à l'ensemble des entiers naturels, la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{pour } k \geq 1, u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

1) Pour montrer que $-2 \leq r_2 \leq -1$, il suffit de montrer que $g(-1)$ est strictement inférieur à 2 et que $g(-2)$ est strictement supérieur à 2 et utiliser la décroissance de la fonction g sur \mathbb{R}^- . On rappelle que $g(r_2) = 2$

2) Evident que $e^{r_2} - 2 = r_2$ car $g(r_2) = 2$. La récurrence n'est pas faite ici mais elle ne pose aucune difficulté (vraie au rang 0 du fait de la question précédente et passage du rang k au rang $k+1$ en utilisant le fait que la fonction exponentielle est croissante)

3) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec la fonction exponentielle sur l'intervalle $-\infty, -1$.

On montre le résultat cherché : pour tous réels a et b tels que $a \leq b \leq -1$, $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a)$

4) En utilisant la question 2, on montre que pour tout entier naturel k , $u_{k+1} - r_2 = e^{u_k} - e^{r_2}$. On en déduit par récurrence que, pour tout entier naturel k , $0 \leq u_k - r_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$ (récurrence non faite ici mais qui ne pose aucune difficulté)

5) En utilisant l'encadrement obtenu à la question précédente, on montre que la limite de $u_k - r_2$ est nulle. Donc, la suite (u_n) , n appartenant à l'ensemble des entiers naturels, est convergente et de limite r_2

Exercice 2

Partie 1

1) Les valeurs propres de A sont 0 et 1

2) Les vecteurs propres sont respectivement (1,0) et (1,1). La matrice P est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie 2

On note E l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ d'ordre deux telles que $AM = MD$

1) La matrice nulle d'ordre 2 appartient à E et si on choisit M et N deux éléments de E et k un réel, $kM+N$ est un élément de E. On en déduit que E est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

2) Evident

3) Evident en montrant que U et A forment une famille génératrice de E et que cette famille est libre

4) $UA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Cette matrice n'est pas de la forme trouvée à la question 2, donc ce n'est pas un élément de E

Partie 3

On note $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour tout M appartenant à $M_2(\mathbb{R})$, par : $f(M) = AM - MD$

1) Pour toutes matrices M et N de $M_2(\mathbb{R})$ et pour tout réel k, on montre que

$$f(kM+N) = k f(M) + f(N) \text{ donc } f \text{ est linéaire}$$

2) Le noyau de f est E et sa dimension est donc 2 (question 3 de la partie 2)

3) D'après le théorème du rang, la dimension de l'image de f est 2

4) Les matrices M de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$ sont de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$.

Il existe donc au moins une matrice non nulle, par exemple la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $f(B) = B$. Ceci montre que 1 est valeur propre de f. La dimension de l'espace propre associé est 1.

Pour montrer que -1 est valeur propre de f, on procède de même en cherchant les matrices telles que $f(M) = -M$, on trouve qu'elles sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il existe donc au moins une matrice non

nulle, par exemple la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $f(C) = -C$. Ceci montre que -1 est valeur propre de f. La dimension de l'espace propre associé est 1.

5) D'après les questions précédentes, f admet trois valeurs propres : 0, 1 et -1 et la somme des dimensions des sous espaces vectoriels associés est de 4, c'est à dire la dimension de $M_2(\mathbb{R})$. f est donc diagonalisable ?

6) On se place dans la base composée par (U, A, B, C), la matrice de f dans cette base est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En partant de cette matrice, on montre aisément que $T^3 = T$, donc $f \circ f \circ f = f$

Exercice 3

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1) On note I_n l'évènement « l'information après n transmissions est correcte ». D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$P(I_{n+1}) = P(I_{n+1}|I_n)P(I_n) + P(I_{n+1}|\bar{I}_n)P(\bar{I}_n)$$

On sait que $P(I_{n+1}|I_n) = p$. On en déduit que $p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)$

2) La suite u_n est une suite géométrique de raison $(2p-1)$, on en déduit que $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = 1/2$

3) On déduit que $p_n = 1/2 + 1/2(2p-1)^n$

4) On distingue 3 cas :

Si $p = 1$, $p_n = 1$

Si $p = 0$, $p_{2n} = 1$ et $p_{2n+1} = 0$

Si p est compris en 0 et 1, la suite p_n converge vers $1/2$

Exercice 4

la fonction f s'écrit : $f(x) = \ln 2 + \ln(1+x+\frac{x^2}{2})$. En posant $u = x + \frac{x^2}{2}$ et en utilisant le

développement limité à l'ordre 3 de la fonction logarithme en 0 : $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

on obtient $f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

La courbe représentative de f admet donc au point $(0, \ln 2)$ une tangente d'équation $y = \ln 2 + x$. De plus,

$f(x) - (\ln 2 + x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$ nous permet de dire que la courbe traverse sa tangente en $(0, \ln 2)$ car cette différence est positive au voisinage de 0^- et négative au voisinage de 0^+

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGE D'ÉCONOMIE

Sujet 1 :

Les marchés maximisent-ils le bien-être social ?

Il s'agit d'une dissertation à propos de la microéconomie, avec une possibilité d'avoir une approche en termes d'histoire de la pensée économique. Peu importe la réponse défendue par les candidats, l'important est que la dissertation soit problématisée, et les arguments étayés par des éléments de théorie économique ou des exemples de faits économiques concrets.

Éléments de réponse et proposition de corrigé :

Introduction : (accroche) Sous le consensus de Washington (années 1990-2000), le FMI et la Banque Mondiale ont cherché à imposer des réformes libérales pour déréglementer les marchés des pays en développement. Mais libérer les marchés entraîne-t-il nécessairement l'augmentation de la satisfaction de la population ?

(éléments d'histoire de la pensée) L'utilitarisme, qui est le fondement philosophique de l'économie néoclassique, remonte à Jeremy Bentham et le « felicific calculus » (calcul du bonheur). Le flambeau a été repris par John Stuart Mill. L'idée de maximisation a été introduite par les marginalistes en économie, révolution néoclassique avec sa théorie de la valeur-utilité (qui vient remplacer la théorie de la valeur-travail des classiques), qui vient mettre le bien-être (utilité) au centre de l'analyse. L'économie néoclassique reste le courant dominant au début du XXI^e siècle, comme en témoigne par exemple le consensus de Washington cité plus haut. Néanmoins, les résultats contrastés de ces programmes amènent à mettre en question l'effet des libres marchés sur le bonheur social.

*(problématique) **Sous quelles conditions les marchés maximisent-ils le bien-être ? Ces conditions sont-elles généralement vérifiées ? Que peut faire l'État pour améliorer la situation ? L'utilité est-elle la bonne mesure du bien-être ?***

I) D'après la théorie néoclassique, le libre marché concurrentiel maximise le bien-être social

A) Les théorèmes de l'économie du bien-être

(éléments d'histoire de la pensée : on peut développer la théorie de l'équilibre général de Walras ; optimum de Pareto : première génération de marginalistes)

Les théorèmes de l'économie du bien-être ont été démontrés par Arrow et Debreu, continuateurs du courant néoclassique au milieu du XX^e siècle.

Premier théorème : l'équilibre général est un optimum de Pareto

(illustration possible : boîte d'Edgeworth).

Deuxième théorème : il suffit de modifier les dotations initiales pour obtenir n'importe-quel optimum de Pareto.

Ainsi, d'après la théorie néoclassique, les marchés libres et concurrentiels produisent toujours un équilibre général walrasien socialement optimal. Le marché maximise donc le bien-être social.

B) Toute intervention sur le marché a des effets pervers

En outre, dans la théorie néoclassique, toute entrave au libre fonctionnement du marché réduit le surplus social.

(Proposition d'illustration : schéma d'un marché microéconomique ; le surplus du consommateur et du producteur est maximisé lorsqu'on laisse le marché atteindre l'équilibre ; si l'État intervient par exemple en plafonnant les prix cela entraîne une perte sèche, du rationnement).

Le marché laissé à la libre-concurrence est le meilleur moyen de réaliser tous les échanges mutuellement avantageux, et donc maximiser le bien-être social.

II) Le marché n'est pas exempt d'échecs

(partie « critique interne » de l'économie néoclassique, c'est à dire arguments appartenant au même cadre théorique)

Il peut y avoir des « échecs du marché » (market failures). Il y a des cas où la libre-concurrence laissée à elle-même produit des effets pervers.

A) L'exemple du monopole

Le monopole qui n'est pas régulé ne maximise pas le bien-être social. On peut faire un schéma (monopole qui maximise son profit versus monopole contraint par l'état ; on voit que dans le second cas le surplus social est maximisé) ; et/ou prendre un exemple concret d'entreprise monopolistique

B) L'exemple des externalités

Les externalités arrivent lorsque la transaction entre des agents A et B (consentants à la transaction) a un effet négatif sur l'agent C (qui n'a rien demandé). L'exemple typique est la pollution. Par exemple, la libre offre et demande de pétrole et de charbon entraînent une quantité élevée d'émissions de CO₂ qui affecte même les personnes ne consommant ni pétrole ni charbon. On peut ici développer des exemples concrets d'externalités (contamination des eaux etc)

C) L'exemple des biens publics

Les biens publics sont communs (si A en profite, cela ne diminue pas la satisfaction que B en tire) et non excludables (il est impossible d'empêcher C d'en profiter aussi). Exemples : un phare, un feu d'artifice etc. Si le marché est laissé à lui-même cela va entraîner un comportement opportuniste : pour chaque individu, il est optimal de profiter du bien public tout en ne payant pas. Au niveau collectif, si personne ne paie, le bien public disparaît (c'est la tragédie des communs). Encore une fois, le marché produit une situation qui n'est pas satisfaisante ; l'intervention publique est nécessaire.

D) Le théorème d'incompatibilité d'Arrow

En réalité il est impossible d'agrèger des préférences individuelles pour en déduire une fonction de préférences sociale.

III) Le paradigme utilitariste est critiquable à beaucoup de niveaux

(partie « critique externe » de l'économie néoclassique, c'est à dire arguments remettant complètement en cause ce courant théorique)

A) L'utilité est une mauvaise mesure du bien-être

Toute l'économie néoclassique prétend que le bien-être correspond à l'utilité. En fait, l'utilité est un concept très abstrait, qui n'est même pas mesurable dans la réalité. Le bonheur est peut-être social (famille, communauté politique etc) plutôt qu'une question de préférences individuelles. De plus, tous les agents ne sont pas maximisateurs.

B) Le bilan des politiques de la marchandisation est critiquable

On peut faire des développements sur l'exploitation des matières premières en Afrique. Les marchés des matières premières ressemblent aux marchés de la microéconomie (produits identiques, prix flexibles etc), pourtant, les marchés ne sont peut-être pas le bon angle pour analyser le bien-être. Peut-être se focaliser sur les entreprises qui exploitent les ressources naturelles permet-il de mieux cerner les questions de bien-être : les travailleurs dans les mines/plantations de café et cacao en Afrique reçoivent une faible part de ces richesses, alors même que le marché est concurrentiel !

On peut aussi interroger la pertinence du concept d'optimum de Pareto : certes, prendre 1€ au PDG d'Areva va réduire son bien-être, mais doit-on prendre cela en compte lorsqu'on considère la misère des mineurs d'uranium au Niger ?

Conclusion (le/la candidate peut défendre son opinion, ici un exemple)

Les libres marchés ont produit de nombreux problèmes environnementaux. Des politiques d'internalisation des externalités environnementales sont nécessaires. De plus, du point de vue de la justice sociale, on peut se focaliser sur le deuxième théorème de l'économie du bien-être : la répartition des dotations est peut-être plus importante au niveau du bien-être global que la concurrence parfaite...

Enfin (ouverture sur la macro) au niveau macroéconomique, les marchés ne se rééquilibrent pas, comme l'a montré John Maynard Keynes. L'intervention publique est donc nécessaire à la survie du capitalisme.

Sujet 2 :

1) Exercice de microéconomie (7 points)

Le marché des bouteilles en verre du pays Justan est caractérisé par 100 entreprises en concurrence pure et parfaite qui ont toutes la même fonction de coût qui est la suivante : $C = 10 + 0,5 Q^2 + 4 Q$. La fonction de demande totale pour les bouteilles en verre est la suivante : $Q = 300 - 20 P$.

1) Donnez la fonction d'offre (Q en fonction de P) d'une firme.

Il faut prix = coût marginal.

$P = dC/dQ$ donc on a $P = Q + 4$ ou encore $Q = P - 4$

2) Déduisez-en la fonction d'offre de l'ensemble du marché.

Il y a 100 firmes donc au niveau du marché $Q = 100 P - 400$

3) Calculez la quantité et le prix d'équilibre sur ce marché.

Il faut offre = demande, ce qui implique $P = 5,83$ (en arrondissant) et $Q = 188,4$.

4) Donnez les profits (ou pertes) de chaque entreprise.

Toutes les entreprises étant identiques, chacune produit 1/100ème de Q, c'est à dire 1,844.

*Profit = recettes - coûts = $5,83 * 1,844 - (10 + 0,5 (1,844)^2 + 4 * 1,844)$*

On obtient : chaque entreprise fait une perte de -8,33 (en arrondissant)

L'entreprise Topbouteille est en position de monopole sur le marché des bouteilles en verre du pays Juiceland. Elle paie un loyer de 300 000 pour le terrain et les équipements qu'elle utilise (ce sont ses seuls coûts fixes).

Sa fonction de coûts variables est donnée par la formule suivante : $CV = Q^2$.

L'entreprise Topbouteille fournit la totalité des producteurs de jus d'orange du pays. Leur demande pour les bouteilles suit la fonction suivante : $Q = 350 - 0,25 P$.

5) Quelle(s) propriété(s) du coût total en fonction de la quantité, font de Topbouteille une entreprise monopolistique ?

Les coûts fixes sont très élevés. Il y a donc des rendements croissants.

6) L'entreprise maximise son profit. Quelles sont la quantité et le prix d'équilibre ?

En posant recettes = PQ et en y insérant l'expression de P en fonction de Q déduite de la fonction de demande pour avoir la recette totale, et ensuite en dérivant pour obtenir la recette marginale,

et en posant $\text{coûts} = \text{coûts fixes} + \text{coûts variables}$ et en dérivant pour obtenir le coût marginal, On pose $\text{recette marginale} = \text{coût marginal}$, et on trouve $P = 840$ et $Q = 140$

7) Calculez le profit. L'entreprise Topbouteille est-elle un monopole naturel ?

Les recettes de Topbouteille sont 117600. Ses coûts sont 319600. Les coûts fixes sont tellement importants que même en étant en monopole Topbouteille fait des pertes. C'est donc un monopole naturel.

2) Exercice de macroéconomie (7 points)

Dans un pays, les ménages consomment $C = C_0 + c(Y-T)$

L'État lève des impôts T et dépense un montant G_0 .

Les entreprises investissent un montant I_0 .

1) Écrivez le total de la demande globale.

$$Yd = C + I + G = C_0 + c(Y-T) + I_0 + G_0$$

2) Expliquez en quoi la fonction de consommation est keynésienne (expliquez C_0 et c).

La consommation dépend du revenu disponible courant (la partie $c(Y-T)$ de la fonction) (+ composante autonome)

3) Exprimez le multiplicateur d'investissement

$$\Delta Y / \Delta I = k = 1 / (1 - c)$$

4) Exprimez le multiplicateur fiscal. Pourquoi est-il négatif ?

$$\Delta Y / \Delta T = l = -c / (1 - c)$$

Une baisse des impôts stimule la demande, c'est logique.

5) Sachant que $0 < c < 1$, comparez ces deux multiplicateurs et expliquez pourquoi l'un est plus élevé en valeur absolue que l'autre.

$|k| > |l|$ en effet l'épargne n'est pas affectée par le multiplicateur fiscal, il y a une fuite dans le circuit.

On pose $c = 0,7$; $C_0 = 60$; $T_0 = 40$; $I_0 = 70$ et $G_0 = 85$

6) Calculez Y

En utilisant la formule exprimée en question (1), on trouve $Y = 5610$

7) Calculez le solde budgétaire $G-T$. D'un point de vue keynésien, le signe de cette valeur est-il une bonne chose ?

$G-T = 45$. Déficit budgétaire. Pour les keynésiens ce n'est pas un problème. Au vu du multiplicateur budgétaire et fiscal, un déficit public a des effets bénéfiques. Une hausse du PIB grâce au déficit permet la hausse des dépenses fiscales en retour.

3) Questions (6 points)

1) Expliquez la **théorie de la valeur-travail**, et mentionnez le courant de pensée auquel elle appartient ainsi que ses trois principaux auteurs.

Cette théorie stipule que la valeur vient du travail qui a été nécessaire pour produire un bien. Par exemple, s'il faut trois plus d'heures pour chasser un daim qu'un castor, le daim doit valoir trois castors (exemple de Smith). Les deux autres auteurs sont Ricardo et Marx. On les appelle les classiques.

2) Qu'est-ce que la courbe de Phillips ?

C'est une courbe qui représente la relation inverse entre l'inflation et le chômage. Au départ simple observation empirique, elle a été analysée par de nombreux courants théoriques.

3) Dans quels buts un pays peut-il dévaluer sa monnaie ?

Dévaluer sa monnaie permet d'augmenter sa compétitivité-coût et donc augmenter ses exportations et favoriser la croissance. En changes fixes, il suffit aux autorités monétaires d'abaisser le taux de change.

[En changes flexibles, on ne parle pas vraiment de dévaluation mais la banque centrale du pays (ou de la zone monétaire) peut émettre de la monnaie (par exemple en achetant des titres) afin d'augmenter l'offre et donc de faire baisser son cours]

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

- 1) Le glissement trimestriel entre le 3^{ème} trimestre 2014 et le second trimestre 2014 de l'indice global est de +1 % ($133,4/132,1 - 1$)
- 2) Le glissement annuel entre le 3^{ème} trimestre 2014 et le 3^{ème} trimestre 2013 de l'indice global est de +3,3 % ($133,4/129,1 - 1$)
- 3) Pas de corrigé type : une méthode graphique ou un calcul de régression conviennent. On peut par exemple regarder le graphique fourni en bas de page et constater que le 1^{er} trimestre est souvent plus fort que les autres trimestres les dernières années, notamment le chiffre du 4^{ème} trimestre de l'année précédente (c'est vrai en 2012, 2013 et 2014). Sachant que l'indice global du 4^{ème} trimestre 2014 est de 140,0, on peut s'attendre à un chiffre supérieur à celui-ci sans pour autant qu'il explose, donc entre 140 et 145.
- 4) L'indice global est structurellement en hausse puisqu'il a été multiplié par deux sur la période examinée (un peu plus de 14 ans). On pourrait essayer de trouver le lien entre le temps et la valeur de l'indice en utilisant le coefficient de corrélation.

Exercice 2

- 1) La somme des pondérations devrait être 10.000 alors que si on somme les pondérations des postes 01 à 12, on trouve 9999.
De même, si on somme les sous-postes du 01 « produits alimentaires et boissons non alcoolisées », on trouve un poids de 4907 au lieu de 5100.
- 2) L'indice national des prix à la consommation du mois de juin a enregistré une hausse de 0,1% par rapport au mois précédent et une hausse de 2,4 % sur un an. Cette hausse résulterait des variations enregistrées par certaines fonctions entre les mois de mai et juin 2017. Compte tenu de leurs poids respectifs, il s'agirait principalement des fonctions « logement, eau, gaz, électricité et autres combustibles » (+0,1%), « communication » (+3,9%), « articles d'habillement et chaussures » (+0,4%) et « santé » (+0,4%).

Exercice 3

- Au Sénégal, 6,0 % de la population consomment actuellement du tabac avec 11,0% des hommes et 1,2% des femmes.

- 5,4% de la population totale fument actuellement du tabac avec 10,7% des hommes et 0,4 % des femmes.

- 0,7% de la population totale utilise actuellement du tabac sans fumée avec 0,3% des hommes et 1,0% des femmes.

- 8 fumeurs actuels sur 10 ont envisagé d'arrêter de fumer ou y ont pensé.

- 9 fumeurs actuels sur 10 ont essayé d'arrêter de fumer sans assistance au cours des 12 derniers mois.

- 30,4% des adultes ont été exposés à la fumée du tabac à l'intérieur de leur lieu de travail.

- 21,6% des adultes ont été exposés à la fumée du tabac à domicile.

- 28,8% des adultes ont été exposés à la fumée du tabac dans les restaurants.

- 95,5% des adultes sont favorables à l'augmentation de la taxation des produits du tabac.

- 4 adultes sur 10 ont remarqué des informations anti cigarette à la télévision ou à la radio.

- 1 adulte sur 10 a remarqué de la publicité/promotion sur les cigarettes dans les magasins où elles sont vendues.

- 2 adultes sur 10 ont remarqué de la publicité/promotion sur les cigarettes (autre que dans les magasins) ou du parrainage des événements sportifs, culturels et artistiques.

- 93,9% des adultes pensent que fumer peut entraîner des maladies graves.

- 91,9% des adultes pensent que respirer la fumée des autres provoque des maladies graves pour les non fumeurs.