Avril 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Exercice I.

Soient les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \left\{ \begin{array}{lclclcl} u_{n+1} & = & u_n & + & 3v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & & & 4v_n & + & w_n \end{array} \right. \quad \text{et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)\,. \tag{1}$$

1. On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(t) = \det(tI_3 - A) = t^3 - 3t^2 - 22t + 24 = (t-1)(t-6)(t+4)$. Ainsi, la matrice A admet trois valeurs propres distinctes $Sp(A) = \{1, 6, -4\}$, elle est donc diagonalisable.
   On peut également justifier que A est diagonalisable par le faite qu'elle soit symétrique à coefficients réels.

2. Pour chacune des valeurs propres de A, on détermine le sous-espace propre associé.
   - Pour $\lambda_1 = 1$, notons E_1 le sous-espace propre associé à λ_1 : $E_1 = \text{Ker}(A - I_3)$, où I_3 est la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. On a

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3y & = & 0 \\ 3x + 4z & = & 0 \\ 4y & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 3x + 4z & = & 0\,. \end{array} \right.$$

   On trouve que $(x, y, z) \in E_1 \Longleftrightarrow \{y = 0\ ,\ z = -\dfrac{3}{4}x \text{ et } x \text{ est quelconque}\}$, d'où, si on prend $x = -4$, on trouve que le sous-espace propre E_1 associé à la v.p. $\lambda_1 = 1$ a pour base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{b_1}\right\}$ avec $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   - Pour $\lambda_2 = 6$, notons E_2 le sous-espace propre associé à λ_2 : $E_2 = \text{Ker}(A - 6I_3)$. On trouve $E_2 = \text{Vect}\left\{\overrightarrow{b_2}\right\}$ avec $\overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   - Pour $\lambda_3 = -4$, le sous-espace propre E_3 associé à λ_3 est $E_3 = \text{Ker}(A + 4I_3)$. On trouve $E_3 = \text{Vect}\left\{\overrightarrow{b_3}\right\}$ avec $\overrightarrow{b_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a donc que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Motrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On a $A^0 = PD^0P^{-1}$, donc la relation est satisfaite pour $n = 0$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$.
   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Après calcul, on obtient, $P^{-1} = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$
   puis,
   $$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 32 + 9(-4)^n + 9\ 6^n & -15((-4)^n - 6^n) & 12(-2 + (-4)^n + 6^n) \\ -15((-4)^n - 6^n) & 25((-4)^n + 6^n) & -20((-4)^n - 6^n) \\ 12(-2 + (-4)^n + 6^n) & -20((-4)^n - 6^n) & 18 + 16((-4)^n + 6^n) \end{pmatrix}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Le système d'équation (1) s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$, et on montre par récurrence que $X_n = A^nX_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Après simplifications, on obtient :
   $u_n = \frac{1}{50}(8 + 21((-4)^n + 6^n))$, $v_n = \frac{-7}{10}((-4)^n - 6^n)$ et $w_n = \frac{1}{25}(-3 + 14((-4)^n + 6^n))$.

Exercice II.

On effectue le changement de variable en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}, \qquad dx\ dy = r\ dr\ d\theta.$$

qui conduit au nouveau domaine d'intégration suivant : $[0,1] \times [0, 2\pi]$.
Ainsi,

$$I = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Puis, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$I = 2\pi \times \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}r = 2\pi\frac{1}{2}\Big[\ln(1+r^2)\Big]_0^1 = \pi\ln(2)\ .$$

Problème III.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1- (a) La série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, la série numérique à termes positifs $\sum |f_n(x)|$ converge.

(b) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I. C'est-à-dire, qu'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)\right| = 0$.

(c) La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, où $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f(x)|/x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme.

(d) $\forall x \in I,\ 0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I, la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument.

(e) Pour x dans I notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$.
Comme la série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$ converge vers 0 et ne dépend pas de x, ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I, i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

(f) On pose pour $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_n$ décroît et converge vers 0. Par application du critère des séries alternées, on montre que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0,1]$.
Le critère des séries alternées nous dit également que, pour tout $x \in I$,

$$|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1}\right) = 0$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0,1]$.
Montrons que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge absolument en aucune valeur de $[0,1]$. Pour x fixé, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$. La série

$\sum \frac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge ; ce qui prouve que la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I.

2- Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0, 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n(1 - x)$.

(a) La suite (α_n) décroît et est positive, donc $\forall n,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.

Pour $x = 0$ et $x = 1$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est clairement nulle. Supposons que $0 < x < 1$, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha_n x^n(1 - x) \leqslant \alpha_0(1-x)x^n$, et $\sum \alpha_0(1-x)x^n = \alpha_0(1-x) \sum x^n$. La série géométrique $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ de raison $0 < x < 1$ est convergente. On en déduit par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I.

(b) **(i)-** Pour tout $x \in I$, $f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. On étudie ensuite la variation de f_n et on montre que la fonction f_n est positive et atteint son maximum sur I au point $\frac{n}{n+1}$.

On a $f_n(\frac{n}{n+1}) = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$, ce qui implique que $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(ii)- On a $\|f_n\|_\infty = \frac{\alpha_n}{n}.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$. Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \frac{\alpha_n}{ne}$, et par comparaison de séries positives, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge si et seulement si $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

Reste à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$. On a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}.$$

Or $(n + 1)\ln(1 - \frac{1}{n+1}) \sim (n + 1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$. D'où le résultat.

(c) **(i)-** Pour $x = 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = +\infty$ et pour $0 \leq x < 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = x^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

(ii)- Pour $x = 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1 - x) = 0$.

Suppososn que $0 \leq x < 1$. Puisque la suite (α_n) est décroîssante, pour tout $k \geqslant n+1$, $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1} \Rightarrow \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k$, pour tout $k \geqslant n+1$, et donc

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\
= \alpha_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} \\
= \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}.
\end{aligned}
$$

La suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x)$ est donc positive et majorée par la suite $(\alpha_{n+k})_{k\geq 0}$, qui ne dépend pas de x et qui converge vers 0 . On en déduit que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

(iii)- Comme la suite (α_n) est décroîssante et minorée par 0, elle est convergente. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$, on a $\ell \geq 0$.

Supposon que $\ell > 0$ et étudions la suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x)$. Pour $x = 1$, on a $R_n(1) = 0$, suppossons $0 \leq x < 1$. Comme pour tout n, $\alpha_n \geqslant \ell > 0$, on a $R_n(x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}$. En particulier, pour $x = 1-\dfrac{1}{n+1}$, on obtient $R_n(1-\frac{1}{n+1}) \geqslant \ell(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$ qui converge vers $\dfrac{\ell}{e}$, i.e. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \ n \geq n_0 \Rightarrow -\varepsilon+\frac{\ell}{e} \leq \ell(1-\frac{1}{n+1})^{n+1} \leq \varepsilon+\frac{\ell}{e}$. Ceci implique en prenant $\varepsilon = \frac{\ell}{2e}$, qu'il existe un entier $n_0 > 1$, telle que pour tout $n \geq n_0$, $R_n(1-\frac{1}{n+1}) \geq \frac{\ell}{2e}$, ce qui montre que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle ; d'où une contradiction avec l'hypothèse. Nous avons donc montré que si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. Nous avons l'équivalence de ces deux propositions d'après la question précédente .

3- (Fonction ζ de Riemann). Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

(a) Pour x réel donné, la série de terme général $\frac{1}{n^x}$, $n \geq 1$, converge si et seulement si $x > 1$ (c'est la série de Riemann). En effet, pour $x \leq 0$ le terme général ne tend pas vers 0 et la série est divergente. Pour $x > 0$, on utilise une comparaison entre série et intégrale : en considérant la fonction $t \to \frac{1}{t^x}$ sur l'intervalle $[k, k+1[$ $(k \geq 1)$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^x} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}dt \leq \frac{1}{k^x}$. D'où, en additionnant ces inégalités membre à membre $(k = 1, \cdots, k = n)$ on obtient,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x}dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}\ .$$

La série $\zeta(x)$ est alors de même nature que l'intégale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}dt$ qui converge si et seulement si $x > 1$. Donc $D =]1, +\infty[$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n :]1, +\infty[$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]1, +\infty[$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{\big(-\ln n\big)^k}{n^x}$.

Soit $1 < a < +\infty$ fixé. Puisque la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\ln n\big)^k}{n^a}$ est convergente, les séries $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ sont normalement, donc uniformément convergentes sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, il en résulte que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et que $\zeta^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^x}$ pour tout $x \in]a, +\infty[$. Comme $1 < a < +\infty$ est arbitraiment pris, on en déduit que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et que $\zeta^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^x}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

(c) D'après la question précédente, la fonction ζ est deux fois dèrivable sur $]1, +\infty[$ et

$$(\zeta)''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\big(\ln n\big)^2}{n^x} \geq 0\,.$$

Donc la fonction ζ est convexe.

(d) Fixonx $a > 1$, d'après la question (a), **(ii)-**, la série de fonctions de somme ζ converge uniformément vers ζ sur $[a, +\infty[$. De plus, chacune des fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ admet une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, à savoir $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ si $n \geq 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$. Le théorème dinterversion des limites permet alors daffirmer que la fonction ζ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\lim_{x \to +\infty} f_n(x)\big) = 1 + 0 + \cdots + 0 \cdots = 1\,.$$

(e) Nous avons démontré dans la question (a), **(i)-** que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}\,,$$

ce qui implique par passage à la limite en n que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}\,,$$

puis en calculant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ que pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

et puisque $\lim_{x\to+1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, on obtient que $\lim_{x\to+1^+}\zeta(x)=+\infty$, car en effet, pour tout $M>0$, il existe $\eta>0$, tel que $1<x<1+\eta\Longrightarrow\zeta(x)\geq\frac{1}{x-1}>M$.

4- Soient $g_n(x)=(-1)^n\cos^n x\,,\ V_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$ et $W_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}g_n(x)\,dx$.

(a) **-** Si $x\neq k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$, alors $|\cos x|<1$, et la série $g(x)$ converge absolument (c'est la série géomérique de raison $\cos x$).
- Si $x=k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$, alors $\cos x=1$ ou $\cos x=-1$, et donc la série $g(x)$ diverge (le terme général ne tend pas vers 0).

(b) Soient $n\leq m$ deux entiers naturels, on a $\forall x\in[0,\pi/2]$, $\cos(x)\in[0,1]\Longrightarrow\forall x\in[0,\pi/2],\ \cos^n(x)\geq\cos^m(x)\geq0\Longrightarrow V_n\geq V_m\geq0$.
Soit $0<\varepsilon<\pi/2$, on a $0<\cos(\varepsilon/2)<1$ et $\lim_{n\to+\infty}\cos^n(\varepsilon/2)=0$, il existe alors $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$n>N\ \Longrightarrow\cos^n(\varepsilon/2)\leq\frac{\varepsilon}{\pi}\,,$$

ce qui implique par la monotonie de cos sur $[0,\pi/2]$ que

$$n>N\ \Longrightarrow\forall x\in[\varepsilon/2,\pi/2]\,,\ \cos^n x\leq\cos^n(\varepsilon/2)\leq\frac{\varepsilon}{\pi}\,.\qquad(2)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^n(x)dx&=\int_0^{\varepsilon/2}\cos^n(x)dx+\int_{\varepsilon/2}^{\pi/2}\cos^n(x)dx\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\ \leq\ \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\ =\ \varepsilon\,,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (2) pour majorer l'intégrale sur $[\varepsilon/2,\pi/2]$ et le fait que la fonction cos est bornée par 1 pour majorer l'intégrale sur $[0,\varepsilon/2]$.
Puisque ε peut être choisi arbitrairement petit, on a bien la convergence vers zéro de la suite $(V_n)_{n\geq0}$.

(c) La série de terme général W_n converge d'après le théorème sur les séries alternées.

(d) Pour tout $a\in[0,1[$, on pose

$$A_n\ =\ (-1)^n\int_0^a\cos^n x\,dx\quad\text{et}\quad B_n=(-1)^n\int_a^{\pi/2}\cos^n x\,dx\,.$$

(i) La série $\displaystyle\sum_n g_n$ converge normalement sur $[a,\pi/2]$ car

$$\sup_{x\in[a,\pi/2]}|(-1)^n\cos^n x|\ =\ \cos^n a$$

et la série de termes positifs $\cos^n a$ converge $\displaystyle\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\cos^n a=\frac{1}{1-\cos a}\Big)$.
La série converge donc uniformément sur $[a,\pi/2]$ d'après la question **1-**, (e).

(ii) Soit $0 < a < \pi/2$. Puisque $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge uniformément sur $[a, \pi/2]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} B_k(a) = \int_a^{\pi/2} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n \cos^n x\Big)\, dx = \int_a^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\, dx\,.$$

Efféctuons le changement de variable

$$u = \tan(a/2)\,, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du\,,$$

on obtient

$$\int_a^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\, dx = \int_{\tan(a/2)}^{1} du = 1 - \tan(a/2)\,.$$

D'où le résultat.

(iii) Soit $0 < a < \pi/2$. On montre comme dans les questions **1-**, (b) et **1-**, (c) que la série de terme général $A_n(a)$ est altérnée. D'après le critère des séries alternées, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} A_k(a) \leq |A_{n+1}(a)| = \int_0^a \cos^{n+1}(x)\, dx \leq a\,.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(a) \leq a$$

d'où $\lim_{a\to 0} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(a) = 0$.

(e) Pour tout $0 < a < \pi/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = A_n(a) + B_n(a)$. Puisque les séries de terme général $A_n(a)$ et $B_n(a)$ converge, on a Pour tout $0 < a < \pi/2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(a)\,.$$

Puisque a est arbitraiment choisi dans $]0, \pi/2[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$ ne dépend pas de a, d'après les questions **4-**, (d), **(ii)** et **4-**, (d), **(iii)**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \lim_{a\to 0} \big(1 - \tan(a/2)\big) = 1\,.$$

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Les exercices sont indépendants.

Exercice n° 1

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}$

1. Étudier les variations et tracer le graphe de *f*

On remarque que la fonction est paire et donc que son graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical. Il suffit de faire l'étude sur les nombres réels strictement positifs. Sa dérivée est égale à : $f^{'}(x) = \dfrac{e^{-x^2}(-4x^2 - 1)}{2x\sqrt{x}} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante de $+\infty$ à zéro sur les réels positifs. Les axes sont des asymptotes.

2. Étudier la convergence de $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

On remarque que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

En 0 : $f(x) \approx \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc convergente

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{x^2}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} = 0$ et l'intégrale est convergente.

3. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{|x|^\alpha}$. Étudier les variations de f_α et la convergence de l'intégrale $\int\limits_{0}^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$.

La fonction f_α est strictement décroissante sur les réels positifs (résultats analogues à ceux pour *f*).

En 0 : $f_\alpha(x) \approx \dfrac{1}{x^\alpha}$, donc convergente si et seulement si $0 < \alpha < 1$,

En $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f_\alpha(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{2-\alpha} f_\alpha(x) = 0$ pour $0 < \alpha < 1$ et l'intégrale est convergente pour $0 < \alpha < 1$

Exercice n° 2

Pour m>0, on pose $f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^m} & si \quad x \neq 0 \\ 1 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$

1. Pour quelle valeur de m la fonction f_m est-elle continue ? (On notera f la fonction qui correspond à la valeur de m ainsi trouvée).
Tout le problème est uniquement en 0.
On a : $\underset{0}{Lim}\, f_m(x) = \underset{0}{Lim}\, x^{1-m} = f_m(0) = 1$ si et seulement si m=1. Dans toute la suite de l'exercice, on fixe m=1 et on note f cette fonction.

2. Étudier la dérivabilité de f

$$\underset{0}{Lim} \frac{f(x)-1}{x}\, f_m(x) = \underset{0}{Lim} \frac{\sin x - x}{x^2} = \underset{0}{Lim}(-\frac{x}{6}) = 0 = f^{'}(0)$$

3. Étudier la continuité de la dérivée de f

$$f^{'}(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \text{ et } \underset{0}{Lim}\, f^{'}(x) = \underset{0}{Lim} \frac{x(1-x^2/2)-(x-x^3/6)}{x^2} = \underset{0}{Lim}(-x/3) = 0 = f^{'}(0)$$

4. f a-t-elle une dérivée seconde continue ?

$$f^{''}(0) = \underset{0}{Lim} \frac{f^{'}(x) - f^{'}(0)}{x} = \underset{0}{Lim} \frac{x(1-x^2/2)-(x-x^3/6)}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

On a : $f^{''}(x) = \dfrac{-x^3\sin x - 2x^2\cos x + 2x\sin x}{x^4} \approx \dfrac{-x^4 + 2x^4 - x^4/3}{x^4} \to -\dfrac{1}{3} = f^{''}(0)$

En conclusion la fonction (pour m=1) est de classe C^2.

Exercice n° 3

On considère deux suites de nombres réels définies par :

$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$ et u_0, v_0 sont donnés quelconque.

1. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_0, v_0 et n.
On a : $u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) = 2^{n+1}(u_0 + v_0)$ et $3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_0 + 2v_0$
Par conséquent : $u_{n+1} = -2^{n+2}(u_0 + v_0) + 3u_0 + 2v_0$ et $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1}(u_0 + v_0) - 3u_0 - 2v_0$

2. Étudier la convergence de ces deux suites
Si $u_0 + v_0 = 0,$ alors $u_{n+1} = 3u_0 + 2v_0 = -v_{n+1}$ (suites stationnaires)
Si $u_0 + v_0 > 0,$ alors $u_n \to -\infty,\ v_n \to +\infty$
Si $u_0 + v_0 < 0,$ alors $u_n \to +\infty,\ v_n \to -\infty$

Exercice n° 4

On considère la matrice M définie par : $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisation de M (si elle est diagonalisable, on précisera une base de vecteurs propres et on notera D la matrice diagonale semblable à M)

On a : $\det(M - \lambda I) = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4-2\lambda & 4 & 2 \\ -1 & 3-2\lambda & 1 \\ 1 & 5 & 5-2\lambda \end{pmatrix}$. On ajoute la troisième colonne à la première pour obtenir : $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 1 & 5 & 5-2\lambda \end{pmatrix} = 0$

Puis on retranche la première ligne à la troisième pour obtenir :

$\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-2\lambda \end{pmatrix} = 0$, d'où

$\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda)(4-2\lambda)(2-2\lambda) = 0$, soit $\lambda = 1, 2$ ou 3

Comme la matrice admet 3 valeurs propres réelles distinctes, elle est diagonalisable.

Elle est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec comme matrice de passage

$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur la droite engendrée par un vecteur propre de la matrice M associé à la valeur propre 3. On notera P_X cette matrice.

Posons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice de projection est égale à : $P_X = X(X'X)^{-1}X' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur le plan engendré par des vecteurs propres de la matrice M associés aux valeurs propres 2 et 3. On notera P_Y cette matrice.

De la même façon, posons $Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $(Y'Y) = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ et

$(Y'Y)^{-1'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$

La matrice de projection est égale à : $P_Y = Y(Y'Y)^{-1}Y' = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Calculer les produits $P_X\,P_Y$ et $P_Y\,P_X$
On obtient $P_X\,P_Y = P_Y P_X = P_Y$

5. Parmi les matrices suivantes : M, D, P_X, P_Y, quelles sont celles qui peuvent définir une norme sur R^3 ?
Il faut que la matrice soit symétrique définie positive, seule *D* vérifie cette propriété.

Exercice n° 5

Soit la matrice *M* définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base du noyau de l'application linéaire associée à *M*.
Il suffit de résoudre le système pour obtenir : $x+y+z=0; y+2z=0$. Le noyau est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (1, -2,1).

2. Déterminer les valeurs propres de cette matrice. Que peut-on en conclure ?

On a : $\det(M-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 3 & 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-\lambda^2+9\lambda+6)=0$

La matrice admet trois valeurs propres distinctes $(0, \dfrac{9\pm\sqrt{105}}{2})$, elle est donc diagonalisable (on pouvait aussi remarquer qu'elle est symétrique).

3. Déterminer une base de l'orthogonal du noyau de *M*.
Il suffit de trouver deux vecteurs indépendants orthogonaux à (1, -2,1).
Par exemple : (1, 0, -1) et (2, 1, 0), soit le plan d'équation : x-2y+z=0. Ce que l'on pouvait aussi trouver directement.

4. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux deux valeurs propres non nulles.
Comme la matrice est symétrique et les valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres sont orthogonaux. Par conséquent on obtient le même résultat qu'à la question précédente : le plan d'équation x-2y+z=0.

5. Résoudre le système $\begin{cases} x+2y+3z=m \\ 2x+3y+4z=2m \\ 3x+4y+5z=3m \end{cases}$, où m est un paramètre réel.
On obtient, de façon triviale, une droite affine comme solution, à savoir : x=z+m ; x+y+z=m

Exercice n° 6

1. Pour n entier strictement supérieur à 3, on considère la fonction numérique suivante : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^2}$. Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphe.
Si n est pair, la fonction est paire et son graphe est symétrique par rapport à l'axe verticale.

Si n est impair, la fonction est impaire et son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
Il suffit d'étudier la fonction sur les réels positifs.

La dérivée est égale à : $f_n^{'}(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(1+x^2)^2}\left[n+(n-2)x^2\right]$ qui est positive pour x>0. La fonction est donc croissante avec une branche parabolique dans la direction oy et une tangente horizontale à l'origine.

2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ pour n entier naturel. Calculer I_0, I_1, I_2

Les calculs sont évidents : $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $I_1 = Ln\sqrt{2}$; $I_2 = 1-\dfrac{\pi}{4}$

3. Calculer I_n et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ pour tout n.

$$I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1-1)}{1+x^2}dx = \frac{1}{n+1} - I_n$$

$$I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + ... + (-1)^n\frac{\pi}{4} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + ... + (-1)^n Ln\sqrt{2}$$

Si n est impair, la fonction est impaire et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx = 0$

Si n est pair, la fonction est paire et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx = 2I_n$

4. Étudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}$ et u_0 un nombre réel quelconque.

Pour n>1, $u_n > 0$ (récurrence évidente). Si $u_0 = 0$, la suite est stationnaire égale à zéro.

Si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors cette limite vérifie : $l = \dfrac{l^2}{1+l^2}$, soit l=0.

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} < 1$. La suite est décroissante et minorée, donc elle converge vers zéro.