AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de $x^2e^x + Ln(1+x^2)$ au point x=0

   La dérivée est égale à $(x^2+2x)e^x + \dfrac{2x}{1+x^2}$ et au point x=0, cette dérivée est nulle.

2. .Résoudre le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

   On obtient $y = 6/x$, puis $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$: L'ensemble des solutions est :

   (3,2) ;(-3,-2) ; (2,3) ;(-2,-3)

3. Calculer $I = \int_{-1}^{1} (x^4 + x^2 + 1)\sin(x)\ dx$.

   La fonction étant impaire, l'intégrale est nulle.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt = 0$.

   Tous les termes sont strictement positifs, donc l'équation n'admet aucune solution.

5. Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^3}}+2\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^3}}+2\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\frac{x^2}{2})-(1-\frac{x^3}{2})}+2\right)=0$$

6. $\lim_{n} u_n = \lim_{n} n(e^{1/n}-1)=\lim_{n} n(1+\frac{1}{n}-1)=1$.

7. Dans un repère orthonormé du plan, déterminer un vecteur unitaire orthogonal à la droite d'équation : x-y+1=0.

   On obtient $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

8. Déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} x^3\, Ln(x)\; dx$.

   Par intégration par parties, en posant $u' = x^3$, on obtient : $\int_{\varepsilon}^{1} x^3\, Ln(x)\; dx = \left[\frac{x^4}{4}Ln\, x\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1}\frac{x^3}{4}dx = -\frac{\varepsilon^4}{4}Ln\,\varepsilon - \frac{1}{16}+\frac{\varepsilon^4}{16}$ et la limite est égale à

   -1/16

9. Résoudre l'équation : $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$.

   Cette équation s'écrit : $x(x-1)(x-2)(x-3)=0$ et les solutions sont : 0, 1, 2, 3

10. Les diverses parcelles d'une exploitation forestière donnent des bois de qualités différentes. On peut distinguer 3 types de parcelles selon le bois produit :

    - Qualité supérieure : 80% des parcelles

    - Qualité moyenne : 15% des parcelles

    - Qualité inférieure : 5% des parcelles

    Quelle est la probabilité de ramasser uniquement du bois de qualité supérieure en se rendant, de façon indépendante, dans 3 parcelles ? La probabilité est égale à $(0{,}8)^3 = 51{,}2\%$

Exercice n° 2

Le paramètre t étant un nombre réel strictement positif, on pose $y_t(x)=\frac{e^{-xt}}{xt}$

1. Etudier les variations de la fonction réelle y_t et donner l'allure de son graphe.

   La fonction est définie pour x non nul. On a : $y'_t(x) = \dfrac{-e^{-xt}\, t\,(xt+1)}{(xt)^2}$ et cette dérivée est nulle pour x=-1/t. on a : $y_t(-1/t) = -e$. On a une branche parabolique dans la direction Oy à moins l'infini.

x	$-\infty$ $-1/t$	0	0 $+\infty$
$y'_t(x)$	+	-	-
$y_t(x)$	$-\infty \nearrow$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$

2. Calculer $I_t = \int_0^1 x^2\, y_t(x)\, dx$

$$I_t = \int_0^1 x^2\, y_t(x)\, dx = \frac{1}{t}\int_0^1 x e^{-xt}\, dx = \frac{-1}{t^2}\left[e^{-xt}\,(x + \frac{1}{t}) \right]_0^1 = \frac{1}{t^3}\left(1 - e^{-t}(t+1)\right)$$

3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} I_t$ et $\lim\limits_{t\to 0} t^3\, I_t$

   $\lim\limits_{t\to+\infty} I_t = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} t^3\, I_t = 1 - 1 = 0$

Exercice n° 3

On considère les fonctions f et g définies sur $[1, +\infty[$ par :

$f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. Etudier les variations de f et g sur $[1, +\infty[$.

   La dérivée de f est $f'(x) = -1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} < 0$ et la fonction est décroissante de -1 à $-\infty$

   La dérivée de g est $g'(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$ et la fonction est croissante de -1 à 0

2. Pour k entier naturel non nul, on pose : $I_k = \left[-k + \sqrt{k^2 - 1}, +\infty\right[$ et $J_k = \left]-\infty, -k - \sqrt{k^2 - 1}\,\right]$. Montrer que ces deux suites (I_k) et (J_k) sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

   Comme g est croissante, on a : $I_{k+1} \subset I_k$

   Comme f est décroissante, on a : $J_k \subset J_{k+1}$

3. Pour k entier naturel non nul, on pose : $f_k(x)=\sqrt{x^2+2kx+1}$. Donner l'ensemble de définition de $f_k(x)$ en fonction de I_k et J_k, et en déduire l'ensemble de définition de la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right)-\sqrt{n^2x^2+1}$

   La résolution de l'équation $x^2+2kx+1>0$, montre que le domaine de définition de $f_k(x)$ est $I_k\cup J_k$ et on en déduit que le domaine de définition de φ_n est $I_n\cup J_n$

4. Calculer $\underset{x\to+\infty}{Lim}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]$ et en déduire $\underset{x\to+\infty}{Lim}\,\varphi(x)$.

   $\underset{x\to+\infty}{Lim}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]=k$ (en multipliant l'expression par sa quantité conjuguée) et $\underset{x\to+\infty}{Lim}\,\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice n° 4

Combien a-t-on de nombres entiers naturels à 3 chiffres qui sont inférieurs à 10^p, dont la somme des chiffres est égale à 3 ? (on pourra discuter selon les valeurs de l'entier naturel *p*)

Notons *x y* et *z* les trois chiffres qui composent un entier strictement inférieur à 10^p. Ce nombre s'écrit : $n=100x+10y+z$. Il faut pour que la somme soit inférieure à 10^p et que $x\le 3; y\le 3; z\le 3$.

Pour *p*= 0, $10^0=1$ et il n'existe aucun entier inférieur à 1 et dont la somme des chiffres est égale à 3,
Pour *p*= 1 $10^1=10$ et 3=003 est le seul nombre, donc $S_1=\{3\}$
Pour *p*= 2 $10^2=100$ et pour un entier de la forme *xyz*, il fat *x*=0 et *y*+*z*=3. D'où $S_2=\{03,12,21,30\}$
Pour $p\ge 2$, *x y* et *z* doivent vérifier : $\begin{cases}100x+10y+z<10^p\\ x+y+z=3\end{cases}$

En faisant varier *x*, puis *y*, puis *z* de 0 à 3, on trouve :
$S_p=\{3,12,21,30,102,111,120,201,210,300\}$

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f définie par:

$$f(x)=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de *f*.
   Le domaine de définition de *f* est l'intervalle $[2,+\infty[$

2. Calculer $(f(x))^2$ pour simplifier l'expression de $f(x)$ et tracer le graphe de *f* dans un repère orthonormé.

   $(f(x))^2 = 2((x-1)+|x-3|)$

   Puis $(f(x)) = \begin{cases} 2 \quad si \ 2 \leq x \leq 3 \\ 2\sqrt{x-2} \quad si \quad x \geq 3 \end{cases}$

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels (x,y) tels que $y = f(x)$, avec *x* inférieur ou égal à 10.
   Les couples d'entiers naturels (x,y) tels que $y = f(x)$ sont (2, 2) ; (3, 2) et (6, 4).

4. Soit *g* la restriction de *f* à l'intervalle $[3,+\infty[$. Montrer que *g* est une bijection de $[3,+\infty[$ sur un intervalle *J* que l'on déterminera. Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de *g* est dérivable sur *J*.
   Comme la fonction *f* est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$, elle est bijective sur cet intervalle. La fonction réciproque est dérivable et sa dérivée est égale à : $(g^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$

5. Déterminer la fonction g^{-1} et tracer son graphe dans le même repère que celui de *f*. Que peut-on dire ?

   On a $g^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{4} + 2$ et le graphe de g^{-1} est le symétrique du graphe de *g* par rapport à la première bissectrice.

Exercice n° 6

1. Etudier les variations et tracer le graphe da la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$

   On décompose la fonction sous la forme : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1} = x-1+\dfrac{3}{x+1}$

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty;\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1; \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = -1$. La droite d'équation $y = x-1$ est donc une asymptote oblique et la droite *x*=-1 une asymptote verticale.

$$f'(x) = \frac{x^2+2}{x+1} = 1 - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$ $-1-\sqrt{3}$	-1	-1 $-1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	↗ $+\infty$

2. Calculer l'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation x=1 et x=2.

   Soit $I = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x-1+\frac{3}{x+1})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 3Ln(x+1)\right]_1^2 = \frac{1}{2} + 3Ln(\frac{3}{2})$

3. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on déterminera.
   Le point (-1, -2) est un centre de symétrie (intersection des deux asymptotes), en effet en posant $X = x+1$ et $Y = y+2$, on obtient la fonction impaire : $Y = X + \frac{3}{X}$

Exercice n° 7

Soit $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$.

1. Calculer I_1. On obtient $I_1 = e^2 - 3$ (en intégrant par parties).

2. Montrer que pour tout entier *n* strictement positif, on a : $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$

   $0 \le I_n \le \int_0^2 \frac{1}{n!} 2^n\, e^2\,dx \le \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$

3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

   $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ (intégration par parties)

4. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.
   La suite (I_n) est décroissante et minorée par zéro, et comme elle est majorée par $\frac{2^n e^2}{(n)!}$ qui converge vers 0, elle converge vers 0.

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f_λ la fonction définie sur R par : $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\lambda x}}$, où λ est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de f_λ et donner l'allure de son graphe.

   La fonction f_λ est définie sur *R*, et sa dérivée est égale à $f_\lambda'(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} > 0$.

   La fonction est donc strictement croissante sur *R* à valeurs dans $]0,1[$. Elle admet l'axe *Ox* et la droite *y*=1 comme asymptotes horizontales.

2. Monter que f_λ admet un centre de symétrie.

   Le point $A(0,1/2)$ est un centre de symétrie. Il suffit de poser $Y = y - \dfrac{1}{2}$ pour obtenir la fonction impaire $Y = \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{2(1+e^{-\lambda x})}$

3. Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une unique solution réelle positive que l'on notera x_λ

   Posons $h_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$. On a $h_\lambda(0) = 1/2; h_\lambda(1) = \dfrac{1}{1+e^{-\lambda}} - 1 < 0$, h_λ est strictement décroissante et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $x_\lambda \in]0,1[$ à l'équation : $h_\lambda(x) = 0$

4. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$

   Comme la fonction f_λ est continue, si la suite (u_n) admet une limite *l*, alors elle vérifie $l = f_\lambda(l)$ et donc $l = x_\lambda$. Il reste à vérifier que la suite est convergente.

   En effet, on a $0 < u_n < 1$ et elle est décroissante.

5. Calculer $I_n = \displaystyle\int_{-n}^{0} f_\lambda(x)\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

   $$I_n = \int_{-n}^{0} f_\lambda(x)\,dx = \int_{-n}^{0} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^{\lambda x}}\,dx = \left[\frac{1}{\lambda} Ln(1+e^{\lambda x})\right]_{-n}^{0} = \frac{1}{\lambda} Ln2 - \frac{1}{\lambda} Ln(1+e^{-\lambda n})$$

   Et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{\lambda} Ln2$

6. Calculer $J_n = \displaystyle\int_{0}^{n} (1 - f_\lambda(x))\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$

En posant $u=-x$, on obtient : $J_n = I_n$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \frac{1}{\lambda} Ln2$

Exercice n° 2

On considère la famille de courbes C_m dont l'équation par rapport à un repère orthonormé est : $x^2+4mx-2(m+1)y=0$, où m est un paramètre réel.

1. Quelle est la nature de la courbe C_m selon la valeur du paramètre m ?
   Si $m=-1$, on obtient deux droites verticales : $x=0, x=4$
   Si $m>-1$, on obtient une parabole convexe d'équation : $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$
   Si $m<-1$, on obtient une parabole concave d'équation : $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$

2. Montrer que les courbes C_m passent par des points fixes que l'on précisera (sauf pour une valeur particulière de m).
   De l'équation précédente, on obtient : $2y-x^2=m(2y-4x)$, soit le système : $\begin{cases} 2y-x^2=0 \\ 2y-4x=0 \end{cases}$, d'où les deux points fixes (0,0) et (4,8) (pour $m\neq -1$)
3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de C_m ($m<-1$), l'axe des abscisses et les droites x=0 et x=4.
   On doit vérifier le signe de la fonction sur ce domaine (pour $m<-1$)
   $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$ et $y'=\frac{2x\ +4m}{2(1+m)}=\frac{x+2m}{1+m}$. On vérifie que la fonction est positive sur le domaine d'intégration, d'où :
   $$Aire=\int_0^4 \frac{x^2+4mx}{2(1+m)}dx=\frac{1}{2(1+m)}\left[\frac{x^3}{3}+2mx^2\right]_0^4=\frac{1}{2(1+m)}(\frac{64}{3}+32m)>0$$

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\frac{1}{1+x}$ et pour chaque entier naturel n (n>1), la fonction f_n définie par : $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de n. La courbe représentative de f_n est désignée par C_n
   On obtient : $f'_n(x)=\frac{x^{n-1}(n+nx-x)}{(1+x)^2}$ et cette dérivée s'annule pour x=0 et $x=\frac{n}{1-n}$
   Si n est pair, le signe de la dérivée est celui de $(n+nx-x)$. D'autre part :
   $\lim\limits_{-\infty} f_n(x)=-\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f_n(x)=+\infty$; $\lim\limits_{-1} f_n(x)=\infty$. La droite x = -1 est une asymptote verticale.

x	$-\infty$		$n/(1-n)$		-1	-1		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		+		-			-		+	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si n est impair, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$n/(1-n)$		-1	-1		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		-		+			+		+	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Tracer dans un repère orthonormé les courbes C_2 et C_3. On précisera la position relative des deux courbes.
   Pour tracer ces deux courbes, il suffit de reprendre les tableaux précédents.
   Pour C_2, $f_2(-2) = -4$ et pour C_3, $f_3(-3/2) = 27/4$
   La position des deux courbes est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{1+x} - \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{x^2(x-1)}{x+1}$
   Pour $-1 < x < 1$, la courbe C_3 est en dessous de C_2, sinon c'est l'inverse.

3. Etant donné un réel x, on note $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison (-x) et de premier terme 1. Exprimer $S_n(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f_n(x)$.
   On a : $S_n(x) = 1 - x + x^2 + ... + (-x)^{n-1}$ et
   $x S_n(x) = x - x^2 + ... + (-x)^n$
   On vérifie alors aisément que $S_n(x) = f(x) - (-1)^n f_n(x)$

4. Pour $|x| < 1$, déterminer la limite de $S_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini. Qu'en est-il pour x=1 ?
   Pour $|x| < 1$, $Lim\, x^n = 0$ et donc $Lim\, S_n(x) = f(x)$ et pour x=1, la suite n'a pas de limite.

5. Pour x réel positif ou nul, on pose : $a_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$. Montrer que l'expression suivante est une constante : $a_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t)\,dt - Ln(1+x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.
   On a (question 3) : $\int_0^x (1 - t + t^2 + ... + (-1)^{n-1} t^{n-1})\,dt = \int_0^x f(t)\,dt - (-1)^n \int_0^x f_n(t)\,dt$, soit
   $a_n(x) = Ln(1+x) - (-1)^n \int_0^x f_n(t)\,dt$ et $a_n(x) - Ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t)\,dt = 0$

6. Comparer $a_n(x)$ et $Ln(1+x)$
   La fonction f_n étant positive entre 0 et x, si n est pair $a_n(x) \le Ln(1+x)$ et si n est impair, $a_n(x) \ge Ln(1+x)$

7. Calculer $\lim_{n\to\infty} a_n(1)$

On a : $\left|a_n(x) - Ln(1+x)\right| \le \int_0^x t^n\,dt = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Pour $0 \le x \le 1$, $\lim_n a_n(x) = Ln(1+x)$ et $\lim_n a_n(1) = Ln(2)$

Exercice n° 4

1. Déterminer les nombres réels *a*, *b*, *c* et *d* vérifiant (pour tout nombre réel *x*) :

$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2}$$

Par identification des polynômes ou en utilisant les pôles des fractions rationnelles, on obtient : $\dfrac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}$

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx$

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right]_{-1}^{0} = 1$$

Exercice n° 5

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, où $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre réel x.

1. Etudier la dérivabilité de f à l'origine.

On a $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1+|x|} = 1 = f'(0)$, donc f est dérivable en 0.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction f est impaire et son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine. On peut donc se restreindre aux nombres réels positifs.

Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ et f est donc strictement croissante de R^+ sur $[0,1[$;

Son graphe admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = 1 - Ln2 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \ \text{(car } f \text{ est impaire)}$$

Exercice n° 6

Etudier la nature des suites suivantes et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n)+3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$, on a : $|u_n| \leq \dfrac{4}{\sqrt{n}}$ et la suite tend vers 0

2. $v_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$, on a $v_n = \dfrac{2n(1+(-1)^n/2n)}{5n(1+(-1)^{n+1}/5n)}$ et la suite tend vers 2/5