AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

On considère l'ensemble *C* des nombres complexes.

1) Résoudre dans *C* l'équation :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

$\Delta = (1 - \sqrt{2})^2$
Deux racines réelles :
$z(1) = 1$
$z(2) = \sqrt{2}$

2) Résoudre dans *C* l'équation :

$$z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$$

Indication : on pourra faire intervenir la variable $u = z + \frac{1}{z}$

L'équation proposée peut s'écrire sous la forme

$u^2 - (1 + \sqrt{2})u + \sqrt{2} = 0$, qui admet deux solutions 1 et $\sqrt{2}$.

Les racines en *z* vérifient donc :

$z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z^2 - z + 1 = 0$

$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ ou $z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$

$z^2 - z + 1 = 0$ conduit à $z(1)$ et $z(2) = 1 \pm i\sqrt{3}/2$

$z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$ conduit à $z(3) = (1 + i)/\sqrt{2}$ et $z(4) = (1 - i)/\sqrt{2}$

Problème

Le symbole *Ln* désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^2 = 7{,}39$; $Ln\,2 = 0{,}69$; $Ln\,0{,}6 = -\,0{,}51$; $Ln\,0{,}7 = -\,0{,}36$; $Ln\,0{,}8 = -\,0{,}22$.

Définition générale

Soit p et q deux nombres entiers, tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.
On considère la famille $W(p, q)$, paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_{p,q}(x) = \frac{(Ln\,x)^p}{x^q}$$

Partie A

Dans cette partie, on pose $q = 1$ et on étudie le sous-ensemble de $W(p, 1)$ formé des fonctions $f_{p,1}$: pour simplifier les notations, on écrira f_p pour $f_{p,1}$.

1) Etudier de façon très précise les variations des fonctions f_1 et f_2 (points caractéristiques, tangentes, limites, concavité, asymptotes éventuelles, etc …).
Tracer les graphes F_1 et F_2 des fonctions f_1 et f_2 dans un repère orthonormé usuel.

Etude de f_1 :
$f_1(x) = Lnx/x$
$x > 0$
$f'_1(x) = (1 - Lnx)/x^2$ a le signe de $(1 - Lnx)$, nulle pour $x = e$, > 0 pour $x < e$ et < 0 pour $x > e$.

Dérivée seconde :
$f''_1(x) = x(2lnx - 3)/x^4$
S'annule en $x_0 = e^{3/2} \sim 4{,}5$
En ce point d'abscisse x_0, $f_1(x_0) \sim 0{,}33$.
→ Point d'inflexion (4,5 ; 0,33)

Asymptotes :
$Lim\ f_1(x) = -\infty$ quand $x \to 0$ (asymptote verticale) et $Lim\ f_1(x) = 0$ quand $x \to +\infty$ (asymptote horizontale).
Pas d'asymptote oblique

Points particuliers :
$f_1(1) = 0$
Pente en (1, 0) : $f'_1(1) = 1$
$f_1(e) = 1/e \sim 0{,}37$.
Pente au point d'inflexion : $f'_1(e^{3/2}) = -0{,}025$

Fonction croissante de 0 à e, passant de $-\infty$ à $1/e$, coupant l'axe des abscisses et point d'abscisse 1 (pente 1), puis décroissante sur $(e, +\infty)$ de $1/e$ à 0.
Changement de concavité en $\boldsymbol{x_0} = e^{3/2} \sim 4{,}5$

x	0	1	e	$+\infty$
f'_1		+	0	-
f_1	$-\infty$	0	$1/e$	0

Etude de f_2 :

$f_2(x) = (Lnx)^2/x$, $x > 0$

$f'_2(x) = Lnx(2 – Lnx)/x^2$

S'annule en $x = 1$ et en $x = e^2 \sim 7{,}4$

f'_2 est négative sur (0, 1), positive entre 1 et e^2, et à nouveau négative pour $x > e^2$;

Donc f_2 est décroissante sur (0, 1), croissante sur $(1, e^2)$, décroissante sur $(e^2, + \infty)$.

Dérivée seconde :

$f''_2(x) = 2x(1 – 3Lnx + (Lnx)^2)/x^4$

Solutions de $1 – 3Lnx + (Lnx)^2 = u^2 - 3u + 1 = 0$ en posant $u = Lnx$

$\Delta = 5 \rightarrow$ il existe deux racines $u(1) = (3 - \sqrt{5})/2 \sim 0{,}38$ et $u(2) = (3 + \sqrt{5})/2 = 2{,}62$

Donc deux racines en x : $x' = e^{u(1)} \sim 1{,}46$ et $x'' = e^{u(2)} \sim 13{,}74$

Asymptotes :

$Lim\ f_2(x) = + \infty$ quand $x \rightarrow 0$ (asymptote verticale) et $Lim\ f_2(x) = 0$ quand $x \rightarrow + \infty$ (asymptote horizontale).

Pas d'asymptote oblique

Points particuliers :

$f_2(1) = 0$, tangente horizontale

$f_2(e^2) = 0$, tangente horizontale

x	0		1		e^2		$+\infty$
f'_2		-	0	+	0	-	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e^2$	$\searrow$	0

2) Soit a un nombre réel, $a > 0$. On appelle A le point de F_2 d'abscisse a.

Donner l'équation de la droite $D(a)$ tangente à F_2 au point A.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la droite $D(a)$ passe-t-elle par l'origine O ?

Tangente à F_2 au point A $(a, f_2(a))$: $(y - f_2(a))/(x – a) = f'_2(a)$

$y = x\ Lna(2 – Lna)/a^2 + 2lna(Lna – 1)/a$

$D(a)$ passe par l'origine si et seulement si $2lna(Lna – 1) = 0$, soit pour $a = 1$ et $a = e$.

Pour $a = 1$, $y = 0$ (tangente horizontale)

Pour $a = e$, $y = x/e^2$

3) Calculer l'intégrale $U(p) = \int_1^{e^p} f_p(x)dx$.

Donner la valeur de $U(3)$.

Que vaut la limite de $U(p)$ quand $p \rightarrow +\infty$?

$U(3) = \int_1^{e^3} f_3(x)dx = \int_1^{e^3} \frac{(Ln\,x)^3}{x} dx$

On pose $u = Lnx$: u varie de 0 à 3 et $du = dx/x$

$U(3) = \int_0^3 u^3 du = (3^4/4) = 81/4$

De même, on trouve aisément que $U(p) = p^{p+1}/(p+1)$

Quand $p \rightarrow + \infty$, $U(p) \rightarrow + \infty$.

Partie B

Dans cette partie, on considère $q = 2$.
On notera par g_p une fonction de $W(p, 2)$: $g_p = f_{p,2}$

$$g_p(x) = \frac{(Ln\,x)^p}{x^2}$$

1) Etudier précisément les variations de g_2 ; donner la forme générale de son graphe.

On trouve aisément :
$g'_2(x) = 2xLnx(1 – Lnx)/x^4$
$g'_2(x)$ est négatif sur $(0, 1)$ et $(e, +\infty)$, et positif entre 1 et e.
Donc g_2 est décroissante, croissante puis décroissante sur ces mêmes intervalles.

$g''_2(x) = 2(1 – 5Lnx + 3(Lnx)^2)/x^4$

g'_2 s'annule en $x = 1$ et $x = e$.

g''_2 s'annule pour $1 – 5Lnx + 3(Lnx)^2) = 0$; soit avec $u = Lnx$, $3u^2 - 5u + 1 = 0$; $\Delta = 13 \rightarrow$ il existe deux racines $u(1) = (5 - \sqrt{13})/6 \sim 0{,}23$ et $u(2) = (5 + \sqrt{13})/6 = 1{,}43$, auxquelles sont associées les valeurs $x(1) \sim$ 1,26 et $x(2) \sim 4{,}18$.

Asymptotes :
$Lim\ g_2(x) = +\infty$ quand $x \rightarrow 0$ et $Lim\ g_2(x) = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.
Pas d'asymptote.
$g_2(1) = 0$
$g_2(e) = 1/e^2$

Tableau de variations

x	0		1		e		$+\infty$
f'_2		-	0	+	0	-	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/e^2$	$\searrow$	0

2) On considère l'intégrale $J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)dx$.
Calculer la valeur de $J(2)$.

On pose $u = Lnx$, u varie de 0 à 2 quand x varie de 1 à e^2.
$J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)dx = \int_0^2 u^2e^{-u}du$

En faisant une intégration par parties :

$J(2) = [-u^2e^{-u}]_0^2 + 2\int_0^2 ue^{-u}du$ = - 4e^{-2} + 2 $\int_0^2 ue^{-u}du$
$\int_0^2 ue^{-u}du$ =$[-ue^{-u}]_0^2$ + $\int_0^2 e^{-u}du$ = -2e^{-2} + (1 – e^{-2})

D'où le résultat : $J(2)$ = - 4e^{-2} + 2[-2e^{-2} + (1 – e^{-2})] = 2 – 10/e^2

3) Etudier les variations de g_p et donner la forme générale de son graphe G_p.

$g'_p(x) = x(Lnx)^{p-1}(p – 2Lnx)/x^4$
S'annule pour x = 1 et $x = e^{p/2}$
Il faut donc distinguer selon la parité de p :

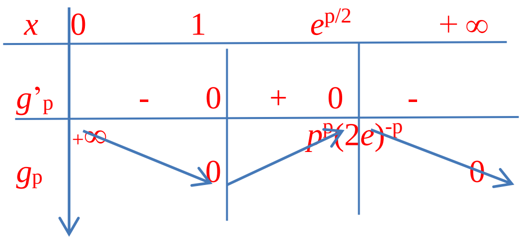
a) Si p est pair, p-1 est impair et $(Lnx)^{p-1}$ est négatif pour $x < 1$
b) Si p est impair, p-1 est pair, et $(Lnx)^{p-1} > 0$ pour $x < 1$

$g''_p(x) = (Lnx)^{p-1}[p(p-1) – 5pLnx + 6(Lnx)^2]/x^4$
S'annule pour x = 1 et si $6u^2 - 5pu + p(p-1) = 0$ avec $u = Lnx$
$\Delta = p(p+24) > 0$ donc il existe deux racines $[5p \pm \sqrt{p(p+24)}]/12$.

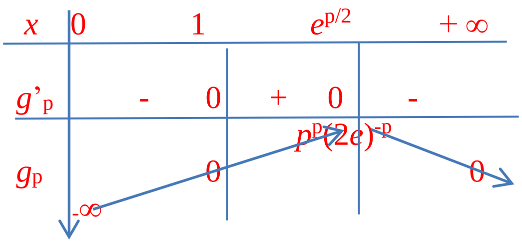
$g_p(1) = 0$
$g_p(e^{p/2}) = \frac{p^p}{(2e)^p}$

Limites :
Si p est pair, $Lim\ g_p(x) = +\infty$ quand $x \to 0$ et $Lim\ g_p(x) = 0$ quand $x \to +\infty$.
Si p est impair, $Lim\ g_p(x) = -\infty$ quand $x \to 0$ et $Lim\ g_p(x) = 0$ quand $x \to +\infty$.
Pas d'asymptote.

***p* pair**



***p* impair**



4) Soit l'intégrale $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)dx$.
Etablir une relation entre $J(p+1)$ et $J(p)$ de la forme $J(p+1) = h(p).J(p) + k(p)$, où $h(p)$ et $k(p)$ sont des fonctions de p que l'on explicitera.
En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.

Faisons le changement de variable $u = Lnx$

Pour $p > 1$: $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)dx = \int_0^2 u^p e^{-u}du$
$= [-u^p e^{-u}]_{(0,2)} + p\int_0^2 u^{p-1}e^{-u}du$
D'où la relation : $J(p) = pJ(p-1) - 2^p/e^2$

→ $h(p) = p$ et $k(p) = - 2^p/e^2$

$J(1) = \int_1^{e^3} \frac{Lnx}{x^2}dx = \int_0^2 ue^{-u}du = 1 - 3/e^2$

$J(2) = 2J(1) - 4/e^2 = 2 - 10/e^2$
(on retrouve bien $J(2)$ de la question $B2$)
$J(3) = 3J(2) - 8/e^2 = 6 - 38/e^2$

$J(4) = 4J(3) - 16/e^2 = 24 - 168/e^2$

<u>Partie C</u>

Soit Δ la droite d'équation $y = x/e^2$ et P la parabole d'équation $y = x^2$.
1) Etudier l'existence de point(s) d'intersection de D et de F_2.
Donner leur valeur exacte ou, sinon, un encadrement à 0,1 près.

$y = (Lnx)^2/x$
$y = x/e^2$
Soit $z = (Lnx)^2/x - x/e^2 = (e^2(Lnx)^2 - x^2)/xe^2 = (eLnx - x)(eLnx + x)/xe^2$
$a(x) = eLnx + x$
$b(x) = eLnx - x$
On montre facilement que b est toujours négative (max = 0, atteint en $x = e$), et que a est croissante de $-\infty$ à $+\infty$.
$a(x) = 0$ a donc une solution r telle que $eLnr = r$.
$a(1) = 1$
$a(1/2) = -1{,}38$
$a(0{,}6) = -0{,}79$
$a(0{,}7) = -0{,}26$
$a(0{,}8) = 0{,}19$
→ r est donc compris entre 0,7 et 0,8.

2) Etudier les points d'intersection de P et de G_2, graphe de g_2. En donner un encadrement à 0,1 près.

De façon analogue, $z = ((Lnx)^2/x^2 - x^2) = a(x).b(x)/x^4$
avec $a(x) = Lnx - x^2$ et $b(x) = Lnx + x^2$
$a'(x) = (1 - 2x^2)/x$, positive sur $(0, \sqrt{2}/2)$, négative ensuite.
$a(x)\Delta$ est donc croissante sur $(0, \sqrt{2}/2)$, allant de $-\infty$ à un maximum m, décroissante sur $(\sqrt{2}/2, +\infty)$.

Sa valeur maximale $m = (Ln2)^2/2 – 4 \sim -3,76, < 0$
Donc $a(x)\Delta$ a un signe constant, négatif, et ne change pas de signe (pas de racine).

Inversement, $b'(x) = (1 + 2x^2)/x$, positive.
$b(x)\Delta$ est donc croissante sur $(0, +\infty)$ allant de $-\infty$ à $+\infty$. Elle admet donc une racine s, telle que $Lns + s^2 = 0$.
s est donc l'abscisse du point d'intersection unique de P et de G_2.

$Ln1 + 1 = 1 > 0$
$Ln0,5 + 0,25 = - 0,44 < 0$
$Ln0,6 + 0,36 = - 0,15$
$Ln0,7 + 0,49 = 0,13$

→ s est entre 0,6 et 0,7

Partie D

Dans cette partie, p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
On veut étudier les variations de la fonction générale $f_{p,q}$.

1) Calculer la dérivée première de $f_{p,q}$, et étudier son signe.

$f'_{p,q}(x) = (Lnx)^{p-1}(p – qLnx)/x^{q+1}$
S'annule pour $x = 1$ et $x = e^{p/q}$
Son signe dépend de la parité de p : en effet, pour $x < 1$:
→ si p est pair, p-1 est impair et $(Lnx)^{p-1} < 0$
→ si p est impair, p-1 est pair et $(Lnx)^{p-1} > 0$

Le signe de la dérivée est donc :
Cas 1 : p pair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$(Lnx)^{p-1}$		-	0	+		+	
$p - qLnx$		+		+	0	-	
$f'_{p,q}(x)$		-	0	+	0	-	

Cas 2 : p impair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$(Lnx)^{p-1}$		+	0	+		+	
$p - qLnx$		+		+	0	-	
$f'_{p,q}(x)$		+	0	+	0	-	

2) Calculer la dérivée seconde de $f_{p,q}$ et déterminer les points d'inflexion du graphe de $f_{p,q}$.

Après calculs, on établit :
$f''_{p,q}(x) = (Lnx)^{p-2}(p(p-1) - p(2q+1)Lnx + q(q+1)(Lnx)^2)/x^{q+2}$

Remarque : on retrouve la cohérence avec les résultats des questions *A*1, *B*1, *B*3.

$f''_{p,q}(x)$ s'annule pour $x = 1$ et pour les solutions de l'équation $p(p-1) - p(2q+1)Lnx + q(q+1)(Lnx)^2 = 0$
Soit l'équation : $q(q+1)u^2 - p(2q+1)u + p(p-1) = 0$
$\Delta = p^2 + 4pq(q+1) > 0$
Donc il y a deux solutions s_1 et s_2 et donc deux points d'inflexion e^{s1} et e^{s2}.

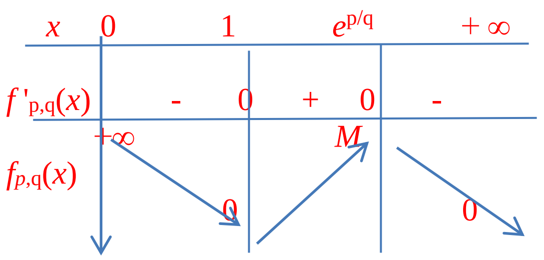
3) Quelles sont les limites de $f_{p,q}$ quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$?

Quand $x \to +\infty$, $f_{p,q}(x) \to 0$
Quand $x \to 0$:
a) Si p est pair, $lim\ f_{p,q}(x) = +\infty$
b) Si p est impair, $lim\ f_{p,q}(x) = -\infty$

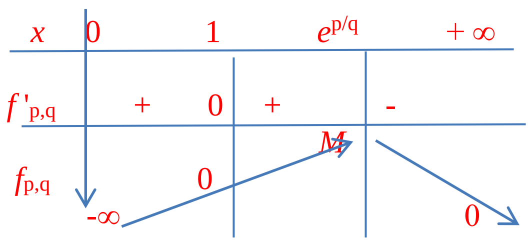
4) En déduire les variations de $f_{p,q}$.

On en déduit :

Cas 1 : p pair



Cas 2 : p impair



La valeur maximum est $M = f_{p,q}(e^{p/q}) = (p/q)^p/e^p = p^p(qe)^{-p}$

5) Soit $p > 1$ et $q > 1$. On considère l'intégrale $A(p, q) = \int_1^{+\infty} f_{p,q}(x)dx$
Etablir une relation de récurrence de la forme $A(p, q) = u(p, q) + v(p, q).A(p-1, q)$, où $u(p, q)$ et $v(p, q)$ sont des fonctions de p et q que l'on explicitera.

En posant $u = (Ln\ x)$ P et en intégrant par parties, on obtient :
$A(p, q) = \frac{p}{q-1} A(p-1, q)$

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Une urne contient 11 boules : 6 bleues, 3 rouges et 2 vertes.
On procède à un tirage simultané de 3 boules.

1) Calculer la probabilité que les 3 boules tirées soient toutes de couleurs différentes.
Soit A cet événement.
$P(A) = (C_6^1\ C_3^1\ C_2^1)/C_{11}^3 = 12/55$

2) Calculer la probabilité que les 3 boules soient de la même couleur.
Soit B ce deuxième événement.
$P(B) = (C_6^3 + C_3^3)/C_{11}^3 = 21/165 = 7/55$

3) On définit la variable aléatoire X égale au nombre de boules bleues tirées.
Donner la loi de probabilité de X.
Calculer son espérance et son écart-type.

X peut prendre 4 valeurs x : x = 0, 1, 2 et 3.
$P(X = x) = (C_6^x\ \ C_5^{3-x})/C_{11}^3$
Ce qui donne :
$P(X = 0) = 2/33$
$P(X = 1) = 12/33 = 4/11$
$P(X = 2) = 15/33 = 5/11$
$P(X = 3) = 4/33$

Espérance $E(X) = \sum_{i=0}^{3} p_i\, x_i = 54/33 = 18/11 \sim 1,64$

$E(X^2) = 108/33 \sim 3,27$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (108/33 - (54/33)^2 = 648/1089 = 0,595$
D'où un écart-type égal à 0,77

Problème 2

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées 3x3 à coefficients réels. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit une matrice $M \in M_3$.
On suppose que M vérifie la relation (R) :

$$(R) \qquad M^2 = aM + bI$$

où I est la matrice identité de M_3, et a et b sont deux nombres réels non nuls.

1) Montrer que M est inversible et donner l'expression de son inverse M^{-1}.

On a $M(M - aI) = bI$
La matrice $C = b^{-1}(M - aI)$ vérifie $M.C = \mathrm{I}$
Donc $b^{-1}(M - aI)$ est l'inverse de M.

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A vérifie la relation (R), et donner les valeurs de a et b associées.

On calcule aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On en déduit que $A^2 = A + 2I$, $a = 1$ et $b = 2$.
Donc $A[(A - I)/2] = \mathrm{I}$

3) En déduire l'expression de A^{-1}, inverse de A.

$A^{-1} = (A - I)/2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Partie B

Soit B la matrice suivante de M_3 :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres de B ? En déduire que B est diagonalisable (on notera par D la matrice diagonale).

Soit $B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Son déterminant (polynôme caractéristique) est $P(\lambda) = (1 - \lambda)(4 + \lambda)(\lambda - 2)$.
Donc B admet trois valeurs propres distinctes qui sont 1, 2, -4.
B, matrice de M_3, admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, est donc bien diagonalisable.

2) Déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P.

Les trois sous-espaces propres étant de dimension 1, il suffit de trouver un vecteur propre (x, y, z) associé à chacune des valeurs propres.
Pour $\lambda = 1$:
$2y - z = x$
$3x - 2y = y$
$-2x + 2y + z = z$

On en déduit $x = y$ et $x = z$: prenons $e(1) = (1, 1, 1)$

Pour $\lambda = 2$:
$-2x + 2y - z = 0$
$3x - 4y = 0$
$-2x + 2y - z = 0$

On en déduit $3x - 4y = 0$ et $-2x + 2y - z = 0$: prenons $x = 4$, donc $y = 3$ et $z = -2$.
Soit le *vp* $e(2) = (4, 3, -2)$

Pour $\lambda = -4$:
$-4x + 2y - z = 0$
$3x + 2y = 0$
$-2x + 2y + 5z = 0$

On en déduit $x - z = 0$ et $3x + 2y = 0$: prenons $x = 2$, donc $z = 2$ et $y = -3$.
Soit le *vp* $e(-4) = (2, -3, 2)$.

La matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression générale de B^n en fonction de D et P et calculer sa valeur explicite.

On sait que $D = P^{-1}BP$

Avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$

Et $D^n = P^{-1}B^n P$; on en déduit : $B^n = PD^nP^{-1}$

$P^{-1} = \frac{-1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

En effectuant le calcul, on trouve :

$B^n = \frac{-1}{30}\begin{pmatrix} -5.2^{n+2} - 10(-4)^n & -12 + 12(-4)^n & -18 + 5.2^{n+2} - 2(-4)^n \\ -15.2^n - 15(-4)^n & -12 - 18(-4)^n & -18 + 5.2^{n+1} + 3(-4)^n \\ 5.2^{n+1} - 10(-4)^n & -12 + 12(-4)^n & -18 - 5.2^{n+1} - 2(-4)^n \end{pmatrix}$

Problème 3

Partie A

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1) = 1$ et $a(n+1) = a(n) + 2$
(2) $b(1) = 6$ et $b(n+1) = b(n) - 1$

On définit la suite $\{u(n)\}$ définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u(n) = 10a(n) + b(n)$$

1) Quelle est la nature des suites $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$? Déterminer les expressions des termes généraux $a(n)$ et $b(n)$ en fonction de n, $a(1)$, $b(1)$.

Les suites $a(n)$ et $b(n)$ sont des suites arithmétiques respectivement de premier terme 1 (6) et de raison 2 (-1).
On obtient facilement :
$a(n) = 1 + 2(n-1)$
$b(n) = 6 - (n-1)$

2) Quelle est la nature de la suite $\{u(n)\}$? Donner l'expression du terme général $u(n)$ en fonction de n et $u(1)$.

$u(n+1) = 10a(n+1) + b(n+1) = 10(a(n) + 2) + b(n) - 1 = 10\,a(n) + b(n) + 19 = u(n) + 19$
La suite $\{u(n)\}$ est une suite arithmétique de raison 19 et de premier terme $u(1) = 16$
Son terme général est $u(n) = u(1) + 19(n-1) = 16 + 19(n-1) = 19n - 3$

3) A partir de quelle valeur de n la condition $u(n) > 1000$ est-elle vérifiée ?
$19n - 3 > 1000$
$n > (1000 + 3)/19 = 52{,}8$
A partir de $n = 53$, $u(n)$ est supérieur strictement à 1000 (et on a : $u(53) = 1004$)

4) On donne la liste de chiffres : 1 ; 6 ; 3 ; 5 ; 5 ; 4 ; 7 ; ….
Quels sont les trois chiffres suivants ?
$u(1) = 16$, $u(2) = 35$, $u(3) = 54$, $u(4) = 73$, $u(5) = 92$
On remarque que la liste est la succession des chiffres composant les nombres $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, etc. C'est un mode de construction de suite infinie de chiffres.
Les trois chiffres suivants après 7 sont donc 3, 9, 2.

Partie B

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier par strictement positif, définies par :

(1) $a(1)$ et $a(n+1) = a(n) + \lambda$
(2) $b(1)$ et $b(n+1) = b(n) + \mu$

où $a(1)$ et $b(1)$ sont des entiers compris entre 1 et 6, λ et μ sont des nombres entiers relatifs, non nuls, tels que $-2 \leq \lambda,\ \mu \leq 2$.

1) Donner la nature de la suite $\{u(n)\}$, définie comme dans la Partie A, et l'expression de son terme général $u(n)$ en fonction de n, $u(1)$, λ et μ.
La suite $\{u(n)\}$ peut-elle être une suite constante ?

$u(n+1) = 10a(n+1) + b(n+1) = 10(a(n) + \lambda) + b(n) + \mu = 10\,a(n) + b(n) + 10\lambda + \mu$
$u(n+1) = u(n) + (10\lambda + \mu)$
Suite arithmétique de premier terme $u(1) = 10a(1) + b(1)$ et de raison $(10\lambda + \mu)$
Son terme général est donc : $u(n) = u(1) + (n-1)\,(10\lambda + \mu)$
$u(n) = 10a(1) + b(1) + (n-1).\,(10\lambda + \mu)$

La suite $u(n)$ est constante si $(10\lambda + \mu) = 0$. Ce qui est impossible puisque λ et μ sont des nombres entiers relatifs non nuls.

2) Pour n fixé, déterminer le maximum et le minimum de $u(n)$.

Puisque $1 \leq a(1),\ b(1) \leq 6$, on en déduit que $10a(1) + b(1)$ vaut au minimum 11 et au maximum 66.
De même, puisque $-2 \leq \lambda,\ \mu \leq 2$, avec λ, μ non nuls, on en déduit que $10\lambda + \mu$ vaut au minimum – 22 et au maximum 22.
$u(n)$ varie donc entre -11 et 88.

3) Etudier l'éventuelle nullité de $u(n)$ selon les valeurs de $a(1)$, b(1), λ et µ. Quelles sont alors les valeurs de n telles que $u(n) = 0$?

Puisque $u(n)$ est compris entre -11 et 88, il peut être nul.
Pour quelles valeurs des paramètres $a(1)$, $b(1)$, λ et µ $u(n)$ sera-t-il nul ?
$u(n) = 0 \leftrightarrow 10a(1) + b(1) + (n\text{-}1).(10\lambda + \mu) = 0 \leftrightarrow n - 1 = -(10a(1) + b(1))/(10\lambda + \mu)$

On remarque que $10a(1) + b(1)$ est toujours > 0 ; il faut donc déterminer les paramètres $a(1)$, $b(1)$, λ et µ tels que $(10\lambda + \mu) < 0$, et $10a(1) + b(1)$ soit un multiple de $(10\lambda + \mu)$.

Tableau des valeurs de $(10\lambda + \mu)$

$10\lambda + \mu$	$\lambda = -2$	-1	1	2
$\mu = -2$	-22	-12	8	18
-1	-21	-11	9	19
1	-19	-9	11	21
2	-18	-8	12	22

Tableau des valeurs de $10a(1) + b(1)$

$10a(1)+b(1)$	$a(1) = 1$	2	3	4	5	6
$b(1) = 1$	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Valeurs admissibles pour $(10\lambda + \mu)$ et $10a(1)+b(1)$:

$10\lambda + \mu = -22$ ($\lambda = -2$, $\mu = -2$) et $10a(1)+b(1) = 22, 44, 66$
Pour $10a(1)+b(1) = 22$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 2$: $n = 2$
Pour $10a(1)+b(1) = 44$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 4$: $n = 3$
Pour $10\ a(1)+b(1) = 66$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 6$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -21$ ($\lambda = -2$, $\mu = -1$) et $10a(1)+b(1) = 21, 42, 63$
Pour $10a(1)+b(1) = 21$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 1$: $n = 2$
Pour $10a(1)+\mathrm{b}(1) = 42$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 2$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 63$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 3$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -18$ ($\lambda = -2$, $\mu = 2$) et $10a(1)+b(1) = 36, 54$
Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 54$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 4$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -12$ ($\lambda = -1$, $\mu = -2$) et $10a(1)+b(1) = 12, 24, 36$
Pour $10a(1)+b(1) = 12$, $a(1) = 1$ et $b(1) = 2$: $n = 2$
Pour $10a(1)+b(1) = 24$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 4$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6$: $n = 4$

$10\lambda + \mu = -11$ ($\lambda = -1, \mu = -1$) et $10a(1)+b(1) = 22, 33, 44, 55, 66$
Pour $10a(1)+b(1) = 22$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 2$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 33$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 3$: $n = 4$
Pour $10a(1)+b(1) = 44$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 4$: $n = 5$
Pour $10a(1)+b(1) = 55$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 5$: $n = 6$
Pour $10a(1)+b(1) = 66$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 6$: $n = 7$

$10\lambda + \mu = -9$ ($\lambda = -1, \mu = 1$) et $10\,a(1)+b(1) = 36, 45, 54, 63$
Pour $10a(1)+b(1) = 36$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 6$: $n = 5$
Pour $10a(1)+b(1) = 45$, $a(1) = 4$ et $b(1) = 5$: $n = 6$
Pour $10a(1)+b(1) = 54$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 4$: $n = 7$
Pour $10a(1)+b(1) = 63$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 3$: $n = 8$

$10\lambda + \mu = -8$ ($\lambda = -1, \mu = 2$) et $10a(1)+b(1) = 16, 24, 32, 56, 64$
Pour $10a(1)+b(1) = 16$, $a(1) = 1$ et $b(1) = 6$: $n = 3$
Pour $10a(1)+b(1) = 24$, $a(1) = 2$ et $b(1) = 4$: $n = 4$
Pour $10a(1)+b(1) = 32$, $a(1) = 3$ et $b(1) = 2$: $n = 5$
Pour $10a(1)+b(1) = 56$, $a(1) = 5$ et $b(1) = 6$: $n = 8$
Pour $10a(1)+b(1) = 64$, $a(1) = 6$ et $b(1) = 4$: $n = 9$