ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note* : *Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre voulu par le candidat.

Exercice 1

Question 1

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

Dans R^3, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a, -5, 1-a) et (1+b, 1, b).

Calculer la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux.

Question 2

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit à la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie. Le jeu continue.
Pour tout entier n, on désigne par :

- A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie » ;
- B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie » ;
- C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie ».

a) Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

b) Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de n.

c) Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de n.

Question 3

a) Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

Exercice 2

Dans R^3, on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives (1, -1, 1), (2, -2, 2), (2, -1, 2).

Question 1

Peut-on trouver un vecteur $\vec{z}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ soit un système libre ? Si oui, construisez-en un.

Question 2

Même question en remplaçant $\vec{v}$ par $\vec{w}$.

Exercice 3

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.

Exercice 4

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. On définit :

- Leur moyenne arithmétique, notée m, par la relation $m = \frac{x+y}{2}$;
- Leur moyenne géométrique, notée g, par la relation $g = \sqrt{xy}$;
- Leur moyenne harmonique, notée h, par la relation $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

Question 1

Montrer que $h \leq g \leq m$ et vérifier que $\sqrt{mh} = g$.

Question 2

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence par la donnée de u_0 et v_0 avec $0 < v_0 \leq u_0$ et par les relations de récurrence suivantes :

- u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n ;
- v_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n.

a) Montrer que pour tout entier n, on a $0 < v_n \leq u_n$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

c) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite notée b.

d) Montrer que b est la limite géométrique de u_n et v_n.

Exercice 5

Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comment a-t-il fait ?

Question 1

a) Montrer par récurrence que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.

b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.

Question 2

On note M la matrice carrée de taille 101 construite de la manière suivante : on numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le ième mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux égaux (troupeau A, troupeau B) et de même poids. On note alors $M_{i,j}$ les coefficients de la i-ième ligne et de j-ième colonne de la matrice M de la façon suivante :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } j = i \\ 0 \text{ } si \text{ } le \text{ } j - i\text{è}me \text{ } mouton \text{ } se \text{ } trouve \text{ } dans \text{ } le \text{ } troupeau \text{ } A \\ 2 \text{ } si \text{ } le \text{ } j - i\text{è}me \text{ } mouton \text{ } se \text{ } trouve \text{ } dans \text{ } le \text{ } troupeau \text{ } B \end{cases}$$

On note X la matrice uni-colonne de taille 101constituée des poids des moutons :

$$X = \begin{pmatrix} poids \text{ } du \text{ } mouton \text{ } 1 \\ poids \text{ } du \text{ } mouton \text{ } 2 \\ \vdots \\ poids \text{ } du \text{ } mouton \text{ } 100 \\ poids \text{ } du \text{ } mouton \text{ } 101 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Calculer MX.

c) Montrer que la matrice M est inversible.

d) En déduire X.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Malgré une augmentation des dépenses de santé des ONG en Afrique, beaucoup de personnes ont encore un accès limité aux soins de bonne qualité. Apportez votre analyse sur ce constat de l'AMREF, ONG africaine de santé publique.

Sujet n° 2

De Gaulle disait « Les Etats n'ont pas d'amis, ils n'ont que des intérêts ». Développez les notions que cette phrase recouvre.

Sujet n° 3

« L'éducation est l'arme la plus puissante qu'on puisse utiliser pour changer le monde. » Explicitez cette phrase de Nelson Mandela, en illustrant votre propos.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Le progrès technique est-il nécessaire à la croissance ?

Sujet n° 2

Microéconomie (8 points)

Remarque : tous les résultats doivent être justifiés et interprétés.

Soit un consommateur en situation de concurrence parfaite dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité U définie par:

$$U(q_1, q_2) = q_1^2 \; q_2 \qquad \text{où } q_1 \text{ et } q_2 \text{ sont les quantités de bien 1 et 2.}$$

1. Existe-t-il des hypothèses particulières que doivent respecter les utilités marginales dans le modèle de concurrence parfaite ?

2. Donnez une autre fonction d'utilité représentant les préférences de ce consommateur (justifiez votre réponse).

3. Donnez le taux marginal de substitution. Interprétez.

4. Quelle est la forme de ses courbes d'indifférence ? A quelles propriétés précises de la relation de préférence correspond cette forme ?

5. Soit son revenu R et le vecteur de prix (p_1, p_2). Donnez ses fonctions de demandes optimales.

6. Les biens 1 et 2 sont-ils des biens normaux ? Donnez un exemple concret de bien non normal (justifiez votre réponse).

7. Si R = 12 et (p_1, p_2) = (2, 1), quel est son choix optimal ? Quel est son nouveau choix si désormais p_1= 1 ?

8. Distinguez par le calcul l'effet de revenu et l'effet de substitution liés à cette variation de prix. Représentez-les graphiquement (les courbes d'indifférence pouvant être tracées seulement succinctement). Interprétez ces deux effets du point de vue du consommateur, graphiquement et économiquement.

Macroéconomie (6 points)

Remarque : tous les résultats doivent être justifiés et interprétés.

On se place dans le cadre d'un modèle « IS-LM », en économie fermée avec des prix fixes (et exogènes). Ce modèle considère trois secteurs – celui des biens et services, celui de la monnaie et celui des titres – et trois types d'agents – l'Etat, les entreprises et les ménages. En outre, on y suppose une situation de sous-emploi des capacités de production.

$$Y = C + I + G \qquad [1]$$

où Y représente la production globale et le revenu, C, la part du produit global consommé par les ménages, I, celle « consommée » par les entreprises et G, celle « consommée » par l'Etat.

$$Y = C + S + T \qquad [2]$$

où Y représente le revenu global, S, l'épargne et T, les impôts.

On suppose que :

C=$C(Y)$, où $C(\cdot)$ représente la fonction de consommation keynésienne telle que $0<C'(Y)<1$;

I=$I(i)$, où $I(\cdot)$ représente la fonction d'investissement telle que $I'(i) < 0$.

Pour ce qui est du marché de la monnaie, la relation d'équilibre dite « LM » s'écrit :

$$M = M^D \qquad [3]$$

où M représente l'offre de monnaie (exogène) et M^D, la demande de monnaie ; en outre on suppose que M^D=$L(Y, i)$, où $L(\cdot)$, la fonction de demande de monnaie est telle que $L'_Y(Y, i) > 0$ et $L'_i(Y, i) <0$.

Questions

1. Quelle(s) hypothèse(s) du modèle permet(tent) de considérer que toute variation nominale correspond à une variation réelle ?

2. Ecrivez la relation d'équilibre dite « IS » du modèle (en ayant pris soin, au préalable, de distinguer l'identité comptable – ou les identités comptables – et les hypothèses de comportement que vous utilisez pour écrire cette relation).

3. Quelles sont les justifications théoriques du caractère croissant de la demande de monnaie par rapport au revenu et de son caractère décroissant par rapport au taux d'intérêt ?

4. On suppose les spécifications suivantes pour la fonction :

- de consommation : $C = c(Y\text{-}T)$, avec $0< c <1$;
- d'investissement : $I = -bi$, avec $0 < b <1$;
- de demande de monnaie : $M^D=l_1Y - l_2i$, avec $0 < l_1 < 1$ et $0 < l_2 < 1$

Déterminez l'expression du couple d'équilibre (Y^*, i^*) du modèle.

5. Déterminez l'effet d'une augmentation des dépenses publiques (financée par emprunt) sur l'équilibre global du modèle en indiquant l'expression des multiplicateurs ainsi que leur signe.

6. Quelle(s) hypothèse(s) du modèle permet(tent) de dire que lorsque la demande globale augmente, le produit et donc le revenu global augmentent ?

Questions (6 points)

1. Rappelez la définition d'un monopole naturel et expliquez en quoi, et selon quelles modalités, l'intervention de l'Etat s'avère alors nécessaire. (2 points)

2. La courbe de Phillips : définition, enjeux et critiques. (4 points)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

***Remarque* : La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires.**

Une entreprise fait un chiffre d'affaires de 2.565.000 euros réparti selon 176 factures, dont le tableau suivant présente la répartition en 7 classes. Chaque classe *i* étant caractérisée par son centre x_i.

i	Classes	x_i	n_i	$n_i x_i$
1	(0 ; 15000(	7500	139	1042500
2	(15000 ; 30000(	22500	12	270000
3	(30000 ; 45000(	37500	16	600000
4	(45000 ; 60000(	52500	3	157500
5	(60000 ; 75000(	67500	2	135000
6	(75000 ; 90000(	82500	2	165000
7	(90000 ; 105000(	97500	2	195000
			176	2565000

Question 1

Calculer la moyenne de la variable *X* (chiffre d'affaires).

Question 2

On note m la masse totale définie par $\sum_{i=1}^{7} n_i x_i$ et n le nombre total de factures défini par $\sum_{i=1}^{7} n_i$. Calculer les effectifs cumulés α_k (en %) et les masses cumulées β_k (en %) définis par :

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\quad \alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n}$ et $\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{m}$

Interprétation : pour $k \geq 1$, α_k est le pourcentage de factures comprises entre (x_k –7500) euros et (x_k + 7500) euros . Ces factures représentent une fraction du chiffre d'affaires égale à β_k.

Question 3

Reporter les points M_k (α_k, β_k) pour $k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ sur un graphique et on appelera courbe de Lorentz la ligne brisée des segments $[M_k, M_{k+1}]$.

Tracer sur le même graphique la droite y = x

Question 4

a) Calculer la surface notée a de la région comprise entre la droite y = x et la courbe de Lorentz en appliquant la formule :

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{6} n_{i+1}(\beta_i + \beta_{i+1}) \text{ avec } \beta_0 = 0$$

b) Calculer l'indice de concentration, appelé indice de Gini, $g = 2a$.

c) Commenter.

Question 5

Pour tout groupe d'individus G d'effectif non nul, on définit son rapport masse sur effectif (mse) par :

$$mse(G) = \frac{masse\ (en\ pourcentage\ de\ la\ masse\ totale)\ possédée\ par\ le\ groupe\ G}{effectif\ (en\ pourcentage\ de\ l'effectif total)\ du\ groupe\ G}$$

Calculer mse pour les factures comprises entre 45000 et 60000 euros.

Question 6

On définit :

$G(\alpha) = groupe\ constitué\ des\ \alpha\ derniers\ individus$ (factures), α étant un pourcentage
$m\ (\alpha) = masse\ en\ pourcentage\ possédée\ par\ le\ groupe\ des\ \alpha\ derniers\ individus$

$$mse\big(G(\alpha)\big) = \frac{m(\alpha)}{\alpha}$$

a) Calculer $mse\big(G(0,5)\big)$ et $mse\big(G(0,1)\big)$.

b) Sachant que l'on a toujours $1 \leq mse\big(G(0,5)\big) < 2$ et $1 \leq mse\big(G(0,1)\big) < 10$ et que l'on peut conclure de l'analyse de ces deux indicateurs les éléments suivants :

En terme de concentration globale :

- Si $mse\big(G(0,5)\big) = 1$; on dit que l'on a une répartition égalitaire (concentration nulle) ;
- Si $mse\big(G(0,5)\big)$ est proche de 1,5 ; on parle de concentration moyenne ;
- Si $mse\big(G(0,5)\big)$ est proche de 2 ; la concentration globale est maximale – les derniers 50% ont pratiquement tout.

En terme de concentration finale :

- Si $mse\big(G(0,1)\big) = 1$; on dit que l'on a une répartition égalitaire (concentration nulle) ;
- Si $mse\big(G(0,1)\big)$ est proche de 5,5 ; on parle de concentration moyenne ;
- Si $mse\big(G(0,1)\big)$ est proche de 10 ; la concentration finale est maximale – les derniers 10% ont pratiquement tout.

Commenter les résultats obtenus à la question 6.a.