AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien de base e, e = 2,718.

Partie A

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x, définie sur R^{+*}, x > 0, par :

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \mathrm{Ln}\, x$$

Etudier très précisément les variations de h.
On étudiera en particulier le signe et les variations de h' et h'' pour établir le tableau complet des variations de h ; on n'oubliera pas les points caractéristiques, leurs tangentes, les limites et les asymptotes éventuelles de h, etc.

Quand x→ + ∞, h(x) tend vers + ∞
Quand x → 0, h(x) tend vers - ∞

$h'(x) = (x - 1)^2/2\, x^2$
h' est donc positive pour x > 0, et nulle pour x = 1

$h''(x) = (x - 1)/ x^3$
h'' est négative pour x < 1, positive pour x > 1, nulle en x = 1
Donc h' décroit sur (0, 1) de + ∞ à 0, et croît de 0 à 1/2 sur (1,+ ∞).

	0	1	+ ∞	
h''	-	0	+	
h'	+ ∞	0	½	(donc h' > 0)
h	- ∞	0	+ ∞	

h est donc strictement croissante sur R^+, de $-\infty$ à $+\infty$, $h(x) < 0$ pour $x < 0$, et $h(x) > 0$ pour $x > 0$.

La courbe représentant h coupe l'axe des abscisses en un point unique, d'abscisse 1.
Pente au point (1, 0) : $h'(1) = 0$ (tangente horizontale)

Concavité : point d'inflexion en $x = 1$; évidente selon le signe de h'' (concave avant le point d'inflexion, convexe ensuite)

Asymptotes :
$h(x)/x$ tend vers 1/2 quand $x \rightarrow +\infty$.
$h(x) - x/2$ est équivalent à $-\text{Ln } x$.
Pas d'asymptote.

Partie B

1) Soient les deux fonctions a(t) et b(t) de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définies par :

$$a(t) = \frac{1}{t+1} \quad \text{et} \quad b(t) = \text{Ln}(1+t)$$

Donner les développements limités à l'ordre 3 de a(t) et b(t) au voisinage de 0.

$a(t) \sim 1 - t + t^2 - t^3$

$b(t) \sim t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

2) Montrer que $b(t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$, pour $t \in J$.

Soit $u(t) = \text{Ln}(1+t) - (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3})$.
Montrons que $u(t) \leq 0$.

$u'(t) = -t^3 / (1+t)$
u' est positive sur (-1, 0), négative ensuite, et nulle en $t = 0$.
Donc u croît sur (- 1, 0) de $-\infty$ à 0, puis décroît sur $(0, +\infty)$ de 0 à $-\infty$.
Comme la valeur maximale de u est 0 pour $t = 0$, pour tout t dans J, $u(t) \leq 0$, d'où le résultat recherché.

3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$f(t) = \frac{(1+t)^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{t})}}{e} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

3a - Quel est le signe de f ?

$f(t) = \exp[(\mathrm{Ln}(1 + t)).(t+2)/2t - 1]$, donc positive comme toute exponentielle.

3b - Montrer que f est continue en 0.
$\mathrm{Ln}\, f(t) = - 1 + (1/t + 1/2)\mathrm{Ln}(1 + t)$
En utilisant le développement de Ln(1 + t) :
$\mathrm{Ln}\, f(t) \sim - 1 + (1/t + 1/2)(t - t^2/2 + t^3/3) = t^2/12$
Ln f(t) tend vers 0 quand t tend vers 0 ;
Donc f(t) tend vers $e^0 = 1$ quand t tend vers 0.
Comme la fonction f a été définie en 0 par f(0) = 1, f est donc continue en 0.

4) Calculer f '(t). Montrer que f est dérivable en 0.

On sait que $\mathrm{Ln}\, f(t) = - 1 + (1/t + 1/2)\mathrm{Ln}(1 + t)$
Donc $f'(t)/f(t) = (1/t + 1/2)(1/(1 + t)) - \mathrm{Ln}(1 + t)/t^2$

Existe-t-il f'(0) ?
Toujours avec le DL de Ln(1+t), on a :
$f'(t)/f(t) \sim (1/t + 1/2)(1 - t + t^2) - (t - t^2/2 + t^3/3)/t^2 \sim t/6$ qui tend vers 0.
Lim f'(t) = 0 quand t $\rightarrow$ vers 0

Par ailleurs, $(f(t) - f(0))/(t - 0) = \{\exp[(1/t + ½)(\mathrm{Ln}(1 + t)).- 1] - 1\}/t$

$[(1/t + ½)(\mathrm{Ln}(1 + t)).- 1] \sim (1/t + 1/2)(1 - t + t^2) - 1 = t^2/12$
$\exp(t^2/12) \sim 1 + t^2/12$
Donc $f'(t)/f(t) \sim t/12 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$.
Comme f(0) = 1, f'(0) = 0 et f est dérivable et f' continue en 0.

Partie C

1) On considère la fonction numérique g de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$g(t) = \frac{1 + t - \frac{1}{1+t}}{2} - \mathrm{Ln}(1 + t)$$

Etablir un lien entre g et h (h introduite à la Partie A).
Il est évident que g(t) = h(1 + t).
Les variations de g s'en déduisent.

2) Montrer que la dérivée f '(t) peut être mise sous la forme $\frac{f(t).g(t)}{t^2}$, pour $t \neq 0$.

On a vu (question 4, partie B), que $f'(t)/f(t) = (1/t + 1/2)(1/(1 + t)) - \mathrm{Ln}(1 + t)/t^2$
$f'(t)/f(t) = [t^2(1/t + 1/2)(1/(1 + t)) - \mathrm{Ln}(1 + t)]/t^2$
$= [((1 + t)^2 - 1)/2(1 + t)) - \mathrm{Ln}(1 + t)]/t^2$
$= [((1 + t) - 1/(1 + t))/2 - \mathrm{Ln}(1 + t)]/t^2 = g(t)/t^2$

D'où : $f'(t) = f(t).g(t)/t^2$

3) Démontrer que f ' est continue pour tout $t \in J$.
On sait que f et g étant définies et continues sur J, leur produit également.
$f'(t) = f(t)\, g(t)/t^2$ l'est donc aussi sur U, sauf en 0.
Or, d'après la question 4 de la partie B, f' est continue en 0.
f' est donc continue sur J.

4) A partir des tableaux de variations de g et f, montrer que $f(t) \geq 1$ pour tout $t \in J$.
On sait que $g(t) = h(1+t)$ (h étudiée en Partie A), donc s'annule en $t = 0$, est négative pour $-1 < t < 0$, et est positive pour $t > 0$.
Par ailleurs, f est strictement positive (question 3a, partie B)

Donc f' est négative pour $t < 0$, et positive pour $t > 0$ (et non définie en 0, mais sa continuité a été vue précédemment).
Donc f est décroissante sur $]-1, 0[$, croissante pour $t > 0$, et sa valeur minimale est $f(0) = 1$.
On en déduit donc que, pour tout appartenant à J, $f(t) \geq 1$.

5) Montrer que $\mathrm{Ln}\, f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$ pour $t \in J$.

$\mathrm{Ln}\, f(t) = -1 + (1/t + 1/2)\mathrm{Ln}(1 + t)$
Comme $\mathrm{Ln}(1 + t) \leq t - t^2/2 + t^3/3$ (question 2, Partie B), on a :
$\mathrm{Ln}\, f(t) \leq -1 + (1/t + 1/2)(t - t^2/2 + t^3/3)$ puisque $(1/t + ½) > 0$

En développant, on trouve aisément que $\mathrm{Ln}\, f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$

Partie D

Soit une suite $\{u_n\}$, à termes positifs, n entier > 0 ; on définit la suite U_n par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) Montrer qu'une condition nécessaire pour que la suite $\{U_n\}$ admette une limite finie U est que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Supposons que U_n converge vers U, $U < +\infty$.
$U_n - U_{n-1} = u_n$
$\mathrm{Lim}_{n \to +\infty} (U_n - U_{n-1}) = U - U = 0 = \lim u_n$

2) Que peut-on dire du comportement de la suite U_n si u_n ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$?
On sait que si $A \Rightarrow B$, $B^c \Rightarrow A^c$, où A^c et B^c sont les contraires de A et B.
Donc, de la question 1, on déduit que si u_n ne tend pas vers 0, alors U_n ne converge pas vers une limite finie U (elle est divergente).

3) Pour x réel > 0, n entier > 0, on définit la suite de fonctions $\{u_n(x)\}$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(nx)^n \sqrt{n}}{n!}$$

Montrer que, pour $x > 0$, le ratio $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ est égal à $e.x.f(\frac{1}{n})$ où f a été définie en B3.
Calcul immédiat en remarquant que $f(1/n) = [(n+1)/n]^{n+1/2}$

4) Dans cette question, on suppose que $ex \geq 1$.
4a – Montrer que la suite de terme général $\{u_n(x)\}$, n entier > 0, est une suite croissante.
$u_{n+1}(x)/u_n(x) \geq f(1/n)$, lui-même ≥ 1, d'après les variations de f (question 4, Partie C).
Comme $u_n(x)$ est positif, la suite $\{u_n(x)\}$ est croissante.

4b - En déduire alors la nature de la suite associée $\{U_n(x)\}$ où $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.
Pour tout entier $n > 0$, $u_n(x) \geq u_1(x)$ puisque u_n est croissante.
Soit m la limite de $u_n(x)$, alors on a $m \geq u_1(x) > 0$, ce qui montre que la suite $\{u_n\}$ ne converge pas vers 0.
Par conséquent, d'après la question 2 de cette Partie D, la suite de terme général U_n est divergente, car ne converge pas vers une limite finie U

5) Dans cette question, on suppose que $ex < 1$.
Soit q un nombre réel tel que $ex < q < 1$.

5a - Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.
Soit q un nombre réel tel que $ex < q < 1$.
$u_{n+1}(x)/u_n(x) = ex.f(1/n)$, et $\lim f(1/n) = f(0) = 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.
Donc la limite de $u_{n+1}(x)/u_n(x) = ex$, quand $n \rightarrow +\infty$, et $ex < q$.
Alors, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.

5b - En déduire alors que, pour tout $n \geq N$, $u_n(x) \leq q^{n-N}\, u_N(x)$.
Pour tout $n \geq N$: $u_{n+1}(x) \leq q.u_n(x)$
On obtient aisément par récurrence : $u_n(x) \leq q^{n-N}\, .u_N(x)$.

5c - Quelle est la nature de la suite $\{U_n(x)\}$?
$U_n(x) = \Sigma_{k=1à+n}\, u_k(x) = \Sigma_{k=1à(N-1)}\, u_k(x) + \Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x) = A(x, N) + \Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x)$, en notant $A(x, N) = \Sigma_{k=1à(N-1)}\, u_k(x)$

Par ailleurs, pour $n \geq N$, $u_n(x)$ est > 0, et vérifie que $u_n(x) \leq q^{n-N}.u_N(x)$, avec $0 < q < 1$.
On en déduit que :
$\Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x) \leq u_N(x).\ \Sigma_{k=Nàn}\, q^{k-N} = u_N(x).\ [1 - (1 - q)^{n-N+1}]/q$, quantité finie car $0 < q < 1$.

Donc $U_n(x)$ est croissante et majorée par $A(x, N) + u_N(x).\ [1 - (1 - q)^{n-N+1}]/q$.
Elle est donc convergente.

6) On définit les deux suites v_n et w_n, n entier > 0 :

$$v_n = \frac{(\frac{n}{3})^n \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{2})^k \sqrt{k}}{k!}$$

Quelles sont les limites de ces deux suites ?
On remarque que v_n n'est autre que $u_n(1/3)$.
Comme e.1/3 est < 1, la suite $V_n = \Sigma v_k$ est convergente (question 5, Partie D).
Et donc $\lim v_n = 0$ (question 1, Partie D).

De même, $w_n = \Sigma_{k=1àn}\, u_k(1/2)$
$e/2 > 1$, et donc d'après la question 4 de cette même partie, la suite $\Sigma_{k=1àn}\, u_k(1/2)$ est divergente, et à termes positifs ; w_n ne converge pas et sa limite est $+ \infty$.

7) On définit la suite $u_n(\frac{1}{e})$.

7a – Donner l'expression de $u_n(\frac{1}{e})$.
$u_n(1/e) = (n/e)^n.n^{1/2} / n!$

7b – Pour tout entier $k \geq 1$, calculer le rapport $R(k, e) = u_{k+1}(\frac{1}{e}) / u_k(\frac{1}{e})$.
$u_{k+1}(1/e)/u_k(1/e) = e.1/e.f(1/k) = f(1/k) \geq 1$.

7c – Montrer, en utilisant la question 5 de la partie C, que Ln R(k, e) est majoré par $M(k) = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}$

En passant par les logarithmes népériens :
$\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e) = \text{Ln } f(1/k) \leq (1/k^2)/12 + (1/k)^3/6$, d'après la question 5 de la Partie C.
$\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e) \leq 1/12k^2 + 1/6k^3$

7d – En déduire que, pour n entier > 1 :

$$\text{Ln}[u_n(\tfrac{1}{e})] \leq -1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} M(k)$$

En sommant l'inégalité de la question précédente pour k allant de 1 à n-1, on obtient :
$\Sigma_{k=1 \text{ à } n-1} [\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e)] \leq \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$
Soit :
$[\text{Ln } u_n(1/e) - \text{Ln } u_1(1/e)] \leq \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$

Or $u_1(1/e) = 1/e$, donc $\text{Ln } u_1(1/e) = -1$, et il s'en suit :
$\text{Ln } u_n(1/e) \leq -1 + \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$, pour $n > 1$

7e – Montrer que la suite $u_n(\frac{1}{e})$ est majorée.
Selon les règles classiques, les suites $(1/k^2)$ et $(1/k^3)$ convergent (décroissantes et minorées par 0).
Notons D et T leurs limites respectives (inutile de chercher à les calculer).
On obtient : $\text{Ln } u_n(1/e) \leq -1 + D/12 + T/6$

$u_n(1/e) \leq \exp[-1 + D/12 + T/6]$, donc $u_n(1/e)$ est une suite majorée (et croissante).

8) Soit la suite $z_n = \frac{(\frac{n}{e})^n}{n!}$, n entier > 0.

8a – Donner une relation entre z_n et $u_n(\frac{1}{e})$.
De façon immédiate : $z_n = n^{-1/2}.u_n(1/e)$.

8b – Quelle est la limite de la suite z_n quand n tend vers $+\infty$?
Comme $u_n(1/e)$ est une suite à termes positifs, croissante et majorée, elle converge vers une limite réelle notée u.
Or $n^{-1/2}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et donc le produit $n^{-1/2}.u_n(1/e) = z_n$ tend vers 0.

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Soit a un paramètre réel qui vérifie $0 < a < 1$.
N désigne un entier fixé, $N > 1$.

1) On considère la suite (u_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$u_0 = 0$
$u_N = 1$
$u_n = a.u_{n+1} + (1 - a)u_{n-1}$, pour tout $n > 0$

Exprimer u_n en fonction de n, N et a (on discutera selon les valeurs du paramètre a).

$a.u_{n+1} - u_n + (1 - a)u_{n-1} = 0$
Equation caractéristique : $ar^2 - r + (1 - a) = 0$
$D = (1 - 2a)^2$

Cas n°1 : a = 1/2
Racine double $r = 1/2a = 1$
La solution générale de la suite s'écrit sous la forme $u_n = s + tn$
$u_0 = 0 = s$
$u_N = 1 = s + tN$
D'où $s = 0$ et $t = 1/N$
$u_n = n/N$

Cas n°2 : a ≠ 1/2
Deux racines distinctes : $r_1 = (1 - a)/a$ et $r_2 = 1$
Solution générale : $u_n = s(1)^n + t[(1 - a)++- {}^2/a]^n$
$u_0 = 0 = s + t$
$u_N = 1 = s + t[(1 - a)/a]^N$

D'où $s = - t$ et $t = 1 / [((1 - a)/a)^N - 1]$

La solution générale de la suite est :
$u_n = [1 - ((1 - a)/a)^n] / [1 - ((1 - a)/a)^N]$

2) On considère la suite (v_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$$v_0 = 1$$
$$v_N = 0$$
$$v_n = a.v_{n+1} + (1 – a)v_{n-1}, \text{ pour tout } n > 0$$

Exprimer v_n en fonction de n, N et a.

$a.v_{n+1} – v_n + (1 – a)v_{n-1} = 0$
L'équation caractéristique est inchangée : $ar^2 - r + (1 – a) = 0$
$D = (1 – 2a)^2$

Cas n°1 : a = 1/2
Racine double $r = 1/2a$
La solution générale de la suite s'écrit sous la forme $v_n = s + tn$
$v_0 = 1 = s$
$v_N = 0 = s + tN$
D'où $s = 1$ et $t = - 1/N$
$u_n = 1 – n/N$

Cas n°2 : a ≠ 1/2
Deux racines distinctes : $r_1 = (1 – a)/a$ et $r_2 = 1$
Solution générale : $v_n = s(1)^n + t[(1 – a)/a]^n$
$v_0 = 1 = s + t$
$v_N = 0 = s + t[(1 – a)/a]^N$

D'où $s = 1 - t$ et $t = 1 / [1 – ((1 – a)/a)^N]$

La solution générale de la suite est :
$v_n = [((1 – a)/a)^n – ((1 – a)/a)^N] / [1 – ((1 – a)/a)^N]$

Problème 2

Le Calife appelle son Grand Vizir, et lui tient ce discours :
« Cher ami, tout le monde sait que tu rêves de prendre ma succession quand je me retirerai. Alors pour que tout soit clair entre nous, je te propose le jeu suivant.
J'ai dans les mains deux sacs de forme et de couleurs identiques. Celui que je tiens dans ma main droite contient deux boules rouges, celui que j'ai dans ma main gauche en contient trois. Tu peux vérifier.
Voici six boules bleues : je te laisse les mettre dans ces sacs comme tu le souhaites. Quand tu auras procédé à la totale répartition de ces six boules bleues entre les deux sacs, tu fermeras les yeux, je tirerai au sort, entièrement au hasard, un sac, et tu choisiras une boule au hasard dans le sac que je te proposerai.
Si la boule est bleue, tu prendras ma succession instantanément.
Mais si elle est rouge, tu seras banni à jamais et condamné à l'exil ».

Comment le Grand Vizir doit-il répartir ses six boules bleues entre les deux sacs de façon à maximiser ses chances de devenir Calife ?

Appelons A le sac que le Calife tient dans sa main droite, et B celui de la main gauche.
Soit x le nombre de billes bleues que le Vizir va mettre dans A, et donc $6 - x$ le nombre de billes bleues qui iront dans B ; $0 \leq x \leq 6$.
Juste avant le tirage, le sac A contient alors $x + 2$ boules, 2 rouges et x bleues ; B en contient $9 - x$, 3 rouges et $6 - x$ bleues.
La probabilité que le Vizir devienne Calife est qu'il tire une boule bleue.
P(Bleue) = P(Bleue/A).P(A) + P(Bleue/B).P(B)

P(Bleue/A) = $x/(x + 2)$
P(Bleue/B) = $(6 - x)/(9 - x)$

P(Bleue) = $[x/(x + 2) + (6 - x)/(9 - x)]/2$

Il suffit alors de faire varier x de 0 à 6 et de voir pour quelle valeur de x cette probabilité est maximale.

x	0	1	2	3	4	5	6
P(Bleue)	0,333	0,479	0,536	0,55	0,533	0,482	0,375

Le meilleur choix est x = 3, répartition égale entre les deux sacs.

Problème 3

C désigne le corps des nombres complexes.

Partie A

Soit f l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq -3$, associe f(z) défini par :

$$f(z) = (z + 1 - i)/(z + 3)$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Déterminer l'ensemble, noté U, des points M tels que le module $|f(z)|$ de f(z) soit égal à 1.

Soit A le point d'affixe $-(1+i)$, B le point d'affixe (-3).
$|f(z)| = 1 \leftrightarrow$ BM/AM = 1, soit BM = AM.
L'ensemble U est donc la médiatrice du segment AB.

2) Déterminer l'ensemble V des points M tels que f(z) soit un nombre réel strictement négatif.

Ecrivons f(z) sous une forme trigonométrique : f(z) = r(cosq + i.sinq).
Pour que f(z) soit un réel, il faut que sinq = 0, soit q = 0 ou π.
Pour que f(z) soit négatif, il faut que q = π.

L'argument de f(z) est l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$.
Donc V est le segment AB, sauf les points A et B.

3) Déterminer l'ensemble W des points M tels que $|f(z)|$ soit un nombre imaginaire pur.

Comme à la question précédente, pour que f(z) soit un imaginaire pur, il faut que q = $\pi/2$ (modulo 2π).
M voit le segment AB sous un angle droit : W est donc le cercle de diamètre AB, à l'exception du point A.

Partie B

Soit g l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq 2i$, associe g(z) défini par :

$$g(z) = (z - 1)/(z - 2i)$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Ecrire g(i) sous forme cartésienne et sous forme trigonométrique.

$g(i) = -(1 + i)$
$r = 2^{1/2}$ et $q = -3\pi/4$

2) Résoudre l'équation g(z) = 2i
$g(z) = 2i = (z - 1)/(z - 2i) \leftrightarrow z(1 - 2i) = 5$
ou $z = 1 + 2i$

3) Déterminer l'ensemble A des points M tels que $|g(z)| = 2$.

Soit $z = x + iy$
$(x - 1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y - 2)^2]$
Ce qui conduit à :
$3x^2 + 3y^2 + 2x - 16y + 15 = 0$
Ou encore : $(x + 1/3)^2 + (y - 8/3)^2 = 20/9$
A est donc le cercle de centre (- 1/3, +8/3) et de rayon $2.5^{1/2}/3$

4) Déterminer l'ensemble B des points M tels que l'argument arg(g(z)) soit égal à $\pi/2$, modulo 2π.

Notons par E le point d'affixe 2i et F le point d'affixe 1.

B est l'ensemble des points M tels que l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{ME})$ est égal à $\pi/2$, modulo 2π.
C'est donc le demi-cercle de diamètre EF situé au-dessus du diamètre.
En effet, pour le demi-cercle au-dessous du diamètre, l'angle orienté est égal à - $\pi/2$.

5) Etudier l'intersection de A et B.

L'intersection de A et B est unique, et est 1 + 2i.

6) Résoudre l'équation f(z) = g(z).

$(z - 1)/(z - 2i) = (z + 1 - i)/(z + 3) \leftrightarrow z(1 + 3i) = 1 - 2i$
Ou encore : $z = -(1 + i)/2$

Problème 4

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien, de base e = 2,718.

On considère la famille de fonctions $f_{a,b}$, où a et b sont deux paramètres réels, définie sur $R^{+*} - \{1\}$, par :

$$f_{a,b}(x) = ax + b(\text{Ln } x)^{-1}$$

1 – Déterminer les réels a et b pour que la courbe C représentant graphiquement $f_{a,b}$ dans le repère orthonormé usuel coupe l'axe des abscisses au point E (e, 0), et pour que la tangente à C au point E soit parallèle à la droite y = 2x.

Dans la suite du problème, on notera par f la fonction correspondant aux valeurs ainsi trouvées de a et b.

$f_{a,b}(e) = ae + b$
$f'_{a,b}(x) = a - b/(x.\text{Ln}^2x)$
$f'_{a,b}(e) = a - b/e = 2$
Ce qui conduit à a = 1 et b = - e.
$f(x) = x - e/\text{Ln}x$

2 – Etudier très précisément les variations de f (dérivées, concavité, limites, asymptotes éventuelles, intersection avec les axes, etc …).

Domaine de définition : $R^{+*} - \{1\}$

Dérivée : $f'(x) = 1 + e/(x.\text{Ln}^2x)$, qui est strictement positive

Dérivée seconde :
$f''(x) = - e.\text{Ln}x(2 + \text{Ln}x)/(x^2.\text{Ln}^4x)$
f'' est négative pour $x < e^{-2}$ et $x > 1$, et négative entre e^{-2} et 1. La concavité s'en déduit.
f'' s'annule pour x = 1 (mais f n'y est pas définie) et pour $x = e^{-2}$.
Au point d'abscisse e^{-2}, la pente est $f'(e^{-2}) = 1 + e^3/4 \sim 6$.

Limites :

$x \to 0 : f(x) \to 0$
$x \to 1_- : f(x) \to +\infty$
$x \to 1_+ : f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty : f(x) \to +\infty$

Point remarquable : outre le point d'inflexion, la courbe représentant f coupe l'axe des abscisses (f(x) = 0) au point d'abscisse e. D'après la question 1, la pente en (e, 0) est 2.

Pente à l'origine :
$(f(x) - f(0))/(x - 0) = 1 - e/(x\text{Ln}x) \to \infty$ quand $x \to 0$.

Asymptote :
La droite x = 1 est asymptote verticale.
La droite y = x est asymptote oblique (f(x)/x → 1 et f(x) – x → 0 quand x → + ∞

Tableau de variations

x	0		e^{-2}		1		e		+ ∞
f’’		-	0	+	0 ||	-			
f’	+ ∞	$\searrow$	6	$\nearrow$	+∞ || +∞	$\searrow$	1		
f	0		$\nearrow$	+∞	||		0	$\nearrow$	+ ∞

3 – Soit la fonction g définie sur l’intervalle R^{+*} – {1} par :

g(x) = x – e/(x.Lnx)

3a) Etudier les positions respectives des courbes F et G représentant les fonctions f et g.

g(x) – f(x) = e(x-1)/(xLn x)
g(x) – f(x) > 0, donc G au dessus de F.
03b) Calculer une primitive de g(x).

Une primitive de g est x²/2 – e.∫dx/(x.Lnx) + K, où K est une constante quelconque.
En posant u = Lnx, ∫dx/(x.Lnx) = ∫du/u = Lnu = Ln(Lnx)
Primitive : K + x²/2 – e.Ln(Lnx)