AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Partie A

1 . Les fonctions *f* et *g* sont dérivables sur $[0;+\infty[$ et pour $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{-x}{1+x} \leq 0 \text{ et } g'(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

Les limites en $+\infty$ sont $-\infty$ pour la fonction *f* et $+\infty$ pour la fonction *g*

Remarque : les tableaux de variations ne sont pas faits.

2 . Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que *f* est négative sur $[0;+\infty[$ et que *g* est positive sur $[0;+\infty[$.

On a donc pour tout $x \geq 0$,

$\ln(1+x) - x \leq 0$

$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$

Ce qui donne :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Partie B

1 . $u_n > 0$ pour $n \geq 1$

On raisonne par récurrence sur *n*.

On a $u_1 = \frac{3}{2} > 0$ et la propriété est vérifiée pour n = 1.

Si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$, donc d'après le principe de récurrence :

$$u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

2 . pour tout $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

On raisonne par récurrence sur *n*.

. Pour *n* = 1, $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\ln u_1 = \ln\left(1+\frac{1}{2^1}\right)$ et la propriété est vérifiée au rang 1.

. Supposons que, pour un certain entier n, $\ln u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

On a alors par définition :

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)=\ln u_n + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

Et la propriété est vérifiée au rang *n* + 1.

3 . Il résulte de la partie A, question 2 que pour tout $k \in N^*$

$$\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2}\text{x}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leq\frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k}\leq\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$$

Soit :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

4 . Les sommes S_n et T_n sont des sommes de termes de suite géométrique.

$$\mathrm{S}_n = 1-\frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n = 1$ et $\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_n = \frac{1}{3}$

5 . a . Variations de u_n

On a pour tout $n \geq 1$, u_n strictement positif :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$ donc $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante

b. Etude de la convergence de (u_n)

On a de plus pour $n \geq 1$: $\ln u_n \leq \mathrm{S}_n \leq 1$

Donc : $u_n \leq e$

La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

c. Comme la suite (u_n) est croissante et à termes strictement positifs, on a ℓ >0. La fonction ln est continue en ℓ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln u_n = \ln \ell$

De l'encadrement : $\mathrm{S}_n - \frac{1}{2}\mathrm{T}_n \leq \ln u_n \leq \mathrm{S}_n$

On déduit : $\lim\limits_{n\to*\infty}\left(\mathrm{S}_n - \frac{1}{2}\mathrm{T}_n\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$

Soit : $1 - \frac{1}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ ➔ $e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq e$

<u>Exercice 2</u>

1. $p(\overline{D_1}) = 0{,}4$ et donc $p(D_1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
$p(R_1 / D_1) = 0{,}3$

Comme $R_1 \subset D_1$ on a : $p(R_1) = p(R_1 \cap D_1) = p(D_1)p(R_1 / D_1)$
$p(R_1) = 0{,}6 \text{ x } 0{,}3 = 0{,}18$

2. $p(\overline{D_2} / \overline{D_1}) = 0{,}3$ car pour que la personne ne décroche pas la seconde fois, il faut qu'elle n'ait pas décroché la première fois et ait été rappelée, et $p(R_2 / D_2) = 0{,}2$

On en déduit $p(D_2 / \overline{D_1}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ et comme $D_2 \subset \overline{D_1}$,
$p(D_2) = p(D_2 \cap \overline{D_1}) = p(\overline{D_1}) \text{x } p(D_2 / \overline{D_1}) = 0{,}4 \text{ x } 0{,}7 = 0{,}28$
Comme $R_2 \subset D_2$ on en déduit :
$p(R_2) = p(R_2 \cap D_2) = p(D_2)p(R_2 / D_2) = 0{,}056$

Enfin puisque R est la réunion disjointe de R_1 et R_2 , on obtient :
$p(R) = p(R_1) + p(R_2) = 0{,}236$

3 . $P_R(R_1)=\dfrac{p(R\cap R_1)}{p(R)}=\dfrac{p(R_1)}{p(R)}=\dfrac{0{,}18}{0{,}236}$

4 . On a un schéma de Bernoulli dans lequel la probabilité de succès est $p = p(R) = 0{,}236$. Le nombre de personnes qui répondent au questionnaire est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (25 ; *p*).
On cherche :

$$p(X = 5) = \binom{25}{5}(0{,}236)^5(1-0{,}236)^{20}$$

On obtient :

$$p(X = 5) = 0{,}179 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

<u>Exercice 3</u>

On écrit : $\dfrac{1}{1+bx^2}=1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)$ et $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+o(x^6)$

Ce qui donne par produit $\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}=1(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+(-b^3+ab^2)x^6+o(x^6)$

Finalement, le développement limité de la fonction est donné par :

$$\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=\left(-a+b-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-b^2+ab+\frac{1}{24}\right)x^4+\left(+b^3-ab^2-\frac{1}{120}\right)x^6$$

Le terme d'ordre 2 disparaît si $b - a = 1/2$, et celui d'ordre 4 disparait aussi si :

$$-b(b-a)=-\frac{1}{24} \Leftrightarrow b = 1/12$$

Dans ce cas, on trouve $a = -5/12$ et pour ces valeurs de a et b, on trouve une partie principale de degré 6 :

$$\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=\frac{1}{480}x^6$$

Exercice 4

Supposons qu'il existe *n* scalaires $\lambda_1,...,\lambda_n$ tels que $\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n = 0$

Ceci se réécrit en : $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (v_k + v_{k+1}) + \lambda_n (v_n + v_1) = 0$

Soit encore : $(\lambda_1 + \lambda_n) v_1 + \sum_{k=2}^{n} (\lambda_{k-1} + \lambda_k) v_k$

Puisque le système $(v_1,...,v_n)$ est linéairement indépendant, on en déduit le système :

$$\begin{cases} \lambda_n = -\lambda_1 \\ \lambda_k = -\lambda_{k-1} \text{ pour } 2 \le k \le n \end{cases}$$

La deuxième égalité donne facilement par récurrence, pour $2 \le k \le n$, $\lambda_k = (-1)^{k-1} \lambda_1$.

En particulier on a $\lambda_n = (-1)^{n-1} \lambda_1$.

On discute maintenant suivant la parité de *n* :

1. Si *n* est impair on a à la fois $\lambda_n = \lambda_1$ et $\lambda_n = -\lambda_1$. Ceci impose $\lambda_1 = 0$ et par suite $\lambda_k = 0$ pour tout *k*. Le système est libre.

2. Si *n* est pair, la dernière équation est $\lambda_n = -\lambda_1$, qui est la même que la première. Elle se simplifie donc. Pour $\lambda_k = (-1)^k$, on a alors $\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n = 0$. Le système est lié.

Exercice 5

1 . Le terme de plus haut de degré P_n est obtenu en dérivant *n* fois X^{2n}. Il vaut donc $\frac{2n!}{n!} X^n$.

2 .

a. Le terme de plus haut de degré Q_p est obtenu en dérivant *p* fois X^{2n}. Il est de degré 2*n*-*p*. Il a donc au plus 2*n*-*p* racines.

b. Prouvons comme Q_p est continue par récurrence finie sur *p* dans {1,…*n*} que Q_p admet exactement *p* racines distinctes dans $]-1,1[$.
Pour *p* = 1 on sait que $Q_0(-1) = Q_0(1) = 0$, et le théorème de Rolle donne l'existence d'une racine dans $]-1,1[$.

Supposons le résultat prouvé au rang p, et prouvons-le au rang p+1 avec $p+1 \leq n$. On note $-1 < \alpha_1 < ... < \alpha_p < 1$ les p racines de Q_p dont l'existence est donnée dans $\left]-1,1\right[$. Remarquons en outre que puisque 1 et -1 sont racines d'ordre n de Q_0, et que $p \leq n-1$, ces deux nombres sont encore racines de Q_p. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle p + 1 fois : une fois entre -1 et α_1, p – 1 fois entre α_k et α_{k+1} et une fois entre α_p et 1.

3 . On a donc prouvé que $P_n = Q_n$ a au moins n racines distinctes dans $\left]-1,1\right[$. Comme il est de degré n, il a au plus n racines et donc P_n s'annule exactement en n points deux à deux distincts de $\left]-1,1\right[$.

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1 : 37

Question 2 : Le nombre d'unités qui n'étaient pas présentes en 2011 est 2, le montant total en kE qu'elles représentent en 2012 est 12.587 keuros. La part qu'elles représentent en 2012 est de 4,4% des montants de l'année 2012 (12.587 / 287.994).

Question 3 :

	Présents dans l'échantillon 2014, dans la base de sondage 2012 et 2011	Absents de l'échantillon 2014 et présents dans la base de sondage 2012 et 2011	**Total** (présents dans la base de sondage 2012 et 2011)
Somme des montants 2012	208280	67127	275407
Somme des montants 2011	230179	71529	301708
Taux d'évolution	-9,51%	-6,15%	-8,72%

Question 4 : Le biais de la méthode actuelle qui est la différence entre l'évolution réelle et celle constatée dans l'échantillon est de 9,51% - 8,72% soit 0,79%.

Question 5 : On voit dans le tableau ci-dessus que les plus grosses unités (celles présentes dans l'échantillon 2012) n'ont pas évolué de la même façon que les plus petites qui sont absentes de l'échantillon par construction.

Question 6 : 16

Question 7 : y_k = 18.000 keuros.

Question 8 : Cela correspond à retenir les deux premières entreprises, soit un seuil de couverture de 19,1%.

Question 9 : n étant égal à 15, on trouve x = 0,03.

Question 10 : Le biais actuel est de 0,79%, cette méthode semble, pour ce produit, moins précise que la méthode actuelle puisqu'il conduit à un biais de 3%.