AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Partie 1

Question 1

$AFA = 4H$

$AGA = 4G + 12H$

$AHA = 4F + 6G + 9H$

Question 2

Les matrices symétriques sont de la forme aF + bG + cH avec a, b, c réels

donc $S_2 = Vect(F, G, H)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

La famille *(F, G, H)* est libre (démonstration évidente) donc c'est une base de S_2

$Dim(S_2)=3$

Question 3

a) $u(S)=\begin{pmatrix} 4c & 4b+c \\ 4b+6c & 4a+12b+9c \end{pmatrix}$, matrice symétrique donc

$$\forall S \in S_2, u(S) \in S_2$$

b) évident

c) La question 1 nous donne le résultat $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

Partie 2

- On note $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

Question 1

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$, pour montrer que -4 (respectivement 1 et 16) est une valeur propre de M , il faut montrer que le *vecteur nul* n'est pas la seule solution de l'équation *(D + 4I) v = vecteur nul,* (respectivement *(D – I)v* et *(D-16I)v*). La recherche des vecteurs propres s'obtient de la même façon, en trouvant les solutions de l'équation *(D + 4I) v = vecteur nul,* (respectivement *(D – I)v* et *(D-16I)v*).

A chacune des valeurs propres, on trouve un sous espace de dimension 1 engendré, par exemple :

Pour la valeur -4, par le vecteur (-4, -3, 4)

Pour la valeur 1, par le vecteur (4, -2 , 1)

Pour la valeur 16, par le vecteur (1, 2, 4)

La matrice *M* est donc diagonalisable

Question 2

Evident en calculant *(D + 4I)(D – I)(D-16I)*

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 3

En développant l'expression *(D + 4I)(D – I)(D-16I)=0*, on obtient $D^3 = 13D^2 + 52D - 64I$ (question 2). On sait que si *M* est diagonalisable, il existe une matrice *P* tel que $M = PDP^{-}1$. Avec ces deux éléments, on obtient le résultat recherché donc $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$

Question 4

En utilisant le fait que l'application linéaire associée à *M* dans la base *(F, G, H)* est *u* (question 3c de la partie 1), on obtient le résultat.

Exercice 2

Question 1

La fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$f'_n(x) = 1+4x+9x^2+....+n^2x^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1}$$

Par construction, la fonction $f'_n(x) > 0 \; pour \, x \geq 0$. La fonction f_n est donc strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[f_n(0), \lim_{x\to+\infty} f_n[$

Comme $f_n(0) = 0$ et que $f_n(x) > x \to +\infty \; quand \; x \to +\infty$, la fonction est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

Cela signifie que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution et que celle-ci est unique

Question 2

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+(n+1)x^{n+1}$$

Question 3

En utilisant la question 2, on a :

$f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+(n+1)(u_n)^{n+1}$

comme $f_n(u_n)=1$, et que $(u_n)\geq 0$, on montre ainsi que $f_{n+1}(u_n)\geq 1$

comme $f_{n+1}(u_{n+1})=1$, on a $f_{n+1}(u_n)\geq f_{n+1}(u_{n+1})$

La fonction f_n étant strictement croissante (question 1), $u_n\geq u_{n+1}$

Ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante

Question 4

La suite (u_n) est décroissante (question 3) et minorée par 0, elle est donc convergente

On note *L* sa limite positive ou nulle

Question 5

On montre le résultat par récurrence $f_n(x)=x\dfrac{1-(n+1)x^n+n\,x^{n+1}}{(1-x)^2}$

- Pour n = 1, c'est évident $f_1(x)=x$

- Supposons la formule vraie au rang n et montrons qu'elle est encore vraie au rang n+1

calcul non présenté ici mais qui ne pose aucun problème

Question 6

$u_2=1/2$

La suite (u_n) étant décroissante, on sait que la limite *L* est inférieure à 1/2

En utilisant le fait que $0\leqslant u_n\leqslant 1/2$, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n(u_n)^n=0$

Question 7

En utilisant la formule obtenue à la question 5, on a

$$f_n(u_n)=u_n\frac{1-(n+1)(u_n)^n+n(u_n)^{n+1}}{(1-u_n)^2}$$

En utilisant les résultats de la question 6, on montre que

$$f_n(u_n)\ \to\ \frac{L}{(1-L)^2}$$

Comme $f_n(u_n)=1$, la limite L est solution de l'équation $\dfrac{L}{(1-L)^2}=1$, équation du second degré ($L^2-3L+1=0$). A la question 6, on a montré que la limite *L* était comprise entre 0 à 1/2, la seule solution de l'équation du second degré acceptable est donc

$L=\dfrac{(3-\sqrt{5})}{2}$

Exercice 3

En effectuant un changement de variable pour ramener l'étude au point zéro afin d'utiliser les développements limités connus (u = x-2), on obtient comme équivalent du numérateur N et du dénominateur D :

$$N = 2\left(\frac{u}{8} - \frac{u^2}{8x16} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

$$D = 3\left(\frac{u}{18} - \frac{u^2}{8x81} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

Ensuite, on trouve que la fonction y qui est égale à N/D - (3/2) a comme équivalent -5u/96 avec u = x - 2

Exercice 4

Question 1

Z est le nombre de 6 obtenus en *N* lancers indépendants avec une probabilité de 1/6 d'obtenir le chiffre 6. La variable *Z* suit donc une loi binomiale de paramètres (*N*,1/6).

E(*Z*) = *N*/6 et V(*Z*) = 5*N*/36

Question 2

Quand *Z* = *n*, on effectue *n* lancers indépendants de la pièce. La variable *X* suit une donc une loi binomiale de paramètres (*n,p*) lorsque $k \leqslant n$

Pour $k > n$, la probabilité est nulle.

Question 3

$Si\ \ n > N\ \ ou\ \ si\ \ k > n\ \ alors\ \ P(X = k\, et\, Z = n)\ =\ 0$, évident car l'un des deux événements $(X = k)\ \ ou\ \ (Z = n)$ est impossible

$Si\ \ 0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N\ \ alors\ \ P(X = k\, et\ Z = n)\ =\ P(Z = n)\ \ P(X = k\ sachant\ Z = n)$ En utilisant le résultat de la question 2, on obtient le résultat attendu

Question 4

Pour la probabilité $P(X = 0)$, on utilise le fait que le résultat que cela dépend de *Z* et en utilisant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements *Z*, on a :

$P(X = 0) = \sum_{n=0}^{N} P(Z = n)\ \ P(\ X = 0\ sachant\ Z = n)$ ce qui donne, en développant, et en utilisant que $(a+b)^n\ =\ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (a)^i (b)^{n-i}$

$$P(X = 0) = \left(\frac{5+q}{6}\right)^N$$

<u>Question 5</u>

Evident en développant les deux parties

<u>Question 6</u>

Pour calculer $P(X=k)$, comme pour la question 4, on utilise le fait que le résultat que cela dépend de Z et en utilisant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements *Z*, on a :

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{N} P(Z=n)\ P(X=k \textit{ sachant } Z=n) \quad \text{ce qui donne}$$

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{k-1} P(Z=n)\ P(X=k \textit{ sachant } Z=n) + \sum_{n=k}^{N} P(Z=n)\ P(X=k \textit{ sachant } Z=n)$$

Les k premiers termes sont nuls du fait de la question 3 ($n<k$)

En utilisant la question 5, on peut écrire que :

$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{N} P(Z=n)\ P(X=k \textit{ sachant } Z=n)=\sum_{n=k}^{N}\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

En posant *i* = *n-k*, on obtient

$$P(X=k)=p^k\ \binom{N}{k}\ \sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}(1-p)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-i}\left(\frac{1}{6}\right)^{k+i}$$

$$P(X=k)=p^k\ \binom{N}{k}\ \left(\frac{1}{6}\right)^{k}\sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}\left(\frac{1-p}{6}\right)^{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-i}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\ \left(\frac{p}{6}\right)^{k}\ \left(\frac{5+1-p}{6}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\ \left(\frac{p}{6}\right)^{k}\ \left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}$$

<u>Question 7</u>

Le résultat de la question 6 montre que la variable aléatoire *X* suit une loi binomiale de paramètres $\left(N,\frac{p}{6}\right)$

<u>Question 8</u>

En inversant « pile » et « face », on obtient que la variable aléatoire *Y* suit une loi binomiale de paramètres $\left(N,\frac{q}{6}\right)$

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ÉCONOMIE

Sujet 1 :

« La croissance en Afrique subsaharienne est-elle créatrice d'emplois ? »

Les années 2000 ont marqué pour l'Afrique subsaharienne le retour de la croissance économique et une progression du revenu moyen de sa population. Entre 2000 et 2015, le PIB par tête a augmenté de plus de 2% par an avec une croissance économique qui a triplé par rapport à la décennie précédente. Avec la chute des prix des matières premières et notamment ceux du pétrole, la croissance s'est depuis nettement ralentie (chiffre 2016) mais pour l'année 2018 les perspectives sont en hausse avec une estimation du FMI de 3,1 % en 2018. En parallèle de ces statistiques de conjoncture économique, il convient également de souligner que l'Afrique subsaharienne connait toujours les taux de PIB par tête les plus faibles du monde et se classe parmi la région la plus vulnérable en termes d'indicateurs de développement. Les enjeux d'une croissance inclusive créatrice d'emplois se posent donc toujours avec acuité dans un contexte où le marché du travail est caractérisé par un très fort taux d'emplois informels (de 30 à 90% des emplois non agricoles selon le FMI), un chômage et un niveau de sous-emploi élevés surtout en ce qui concerne les jeunes et un niveau de productivité qui reste bas. Les défis qui sous-tendent les dynamiques de croissance en Afrique subsaharienne portent donc sur la création de davantage d'emplois au cours des prochaines années, d'améliorer leur qualité (productivité, conditions de travail, protection sociale) et enfin de connecter les travailleurs aux emplois afin de mettre fin à l'extrême pauvreté et promouvoir une prospérité partagée en lien avec les Objectifs du Développement Durable (ODD).

I- L'évolution de la croissance en Afrique subsaharienne

I.1- Les dynamiques récentes de la croissance

Evolution des PIB, PIB réels, revenus moyens (voir statistiques FMI, BM ou BAD)

https://www.imf.org/fr/Publications/REO/SSA/Issues/2018/09/20/sreo1018

I.2- Les enjeux actuels de la croissance en Afrique subsaharienne

Croissance inclusive et développement durable

ODD 8 : travail décent et croissance économique durable

https://www.un.org/sustainabledevelopment/fr/economic-growth/

II- Les défis d'une croissance inclusive créatrice d'emplois en Afrique subsaharienne

II.1- Les tendances de l'emploi en Afrique subsaharienne

Evolution des niveaux d'activité, secteurs créateurs d'emplois, chômage et sous-emploi, informel, niveaux de productivité (voir statistiques du BIT et du FMI)

https://www.imf.org/fr/Publications/REO/SSA/Issues/2018/09/20/sreo1018#ch3

II.2- Les défis actuels et à venir au niveau de l'emploi

Politiques macroéconomiques ciblées (connexion de l'offre à la demande), investissement capital humain (hausse de la productivité, travail qualifié), diversification des secteurs d'activités créateurs d'emplois (secteur agricole reste le principal créateur d'emplois), modifications technologiques et enjeux sur l'emploi, croissance de l'emploi suffisante pour combler l'augmentation de la population active (plus de 3% en moyenne par an)

Sujet 2 :

1) Exercice de microéconomie (7 points)

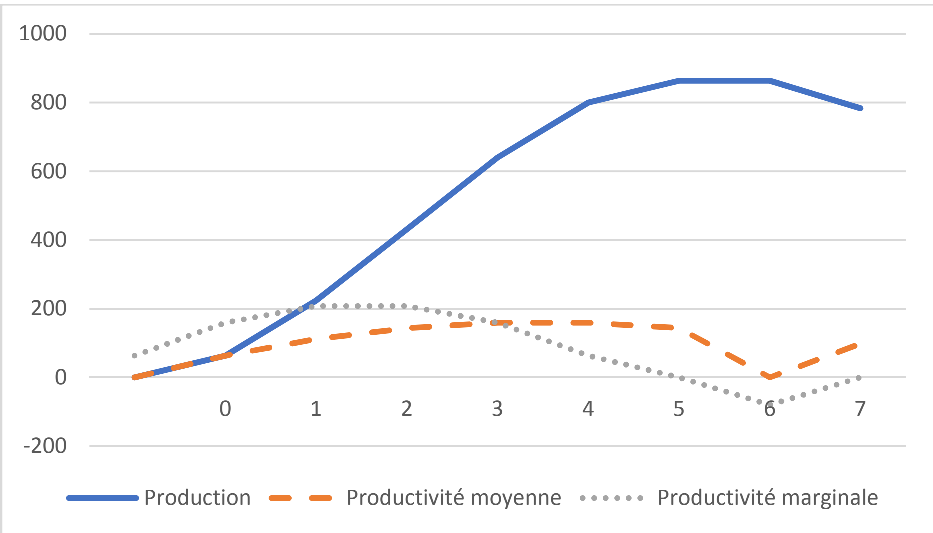
Un bien Q est produit à l'aide de deux facteurs de production, le travail (L) et le capital (K). A court terme, l'entreprise n'a pas la possibilité de changer son stock de capital. La production varie donc en fonction du nombre d'unités de facteur L (une unité de L correspond à une heure de travail ouvrier). La production réalisée est présentée dans le tableau ci-dessous :

Unités de travail L	Unités Produites Q
0	0
1	64
2	224
3	432
4	640
5	800
6	864
7	864
8	784

1- Calculez les valeurs de la productivité totale, la productivité moyenne et la productivité marginale de l'exemple proposé.

Nb d'heures de travail L	Nombre d'unités produites Q	PM Q/L	Pm ΔQ/ΔL
0	0	0	64
1	64	64	160
2	224	112	208
3	432	144	208
4	640	160	160
5	800	160	64
6	864	144	0
7	864	123.43	-80
8	784	98	-

2- Donnez la représentation graphique des diverses courbes de productivité.



3- Quelle est la productivité horaire lorsque L = 4 et lorsque L = 6 ?

160 et 144 (voir tableau)

4- Que signifie l'existence d'une productivité marginale positive ? négative ? nulle ?

La productivité marginale d'un facteur est par définition la variation de production qui résulte de l'augmentation d'une unité de ce facteur.

Positive : la productivité totale augmente du fait de l'utilisation d'une unité supplémentaire de facteur

Négative : l'utilisation d'une unité supplémentaire de facteur entraîne une baisse de la quantité totale produite.

Nulle : l'utilisation d'une unité supplémentaire de facteur laisse la production totale inchangée.

5- La valeur de la productivité marginale du facteur travail varie lorsque le nombre d'heures augmente. En vous appuyant sur l'exemple, montrer quel est le lien qui peut être établi entre la valeur et le sens de l'évolution de la productivité marginale du travail et ceux de la productivité totale ?

Valeur de L	0 1 2 3 4 5 6 7 8		
Valeur de Pm	Positive	Positive	Négative
Sens de variation de Pm	Croissante	Décroissante	-
Sens de variation de la productivité totale	Croissance + que proportionnelle à l'utilisation de L	Croissance moins que proportionnelle à l'utilisation de L	Décroissance

2) Exercice de macroéconomie (7 points)

Soit une économie imaginaire dans laquelle sont appliqués les principes keynésiens :

Y = revenu national, C = consommation nationale, I = investissement national

Les comportements de l'économie étudiée sont caractérisés par les équations suivantes :

$C = cY + Co$

$I = I_0$

Co = 100 milliards de la monnaie de ce pays, c = 0.75 et Io = 10 milliards.

1) - Calculez le revenu national d'équilibre $Y_{e.}$

OG = Y et DG = C + Y

A l'équilibre OG = DG donc Ye = C+ I

Ye = 0,75 Ye + 100 + 10

Ye = 440 milliards

2) - I_0 passe de 10 milliards à 20 milliards, quantifiez l'effet sur le revenu d'équilibre.

DG = 0,75Y + 100 + 20

A l'équilibre DG = OG =Ye'

Ye' =0,75 Ye' + 120

Ye' = 480 milliards

Ye augmente de 40, soit quatre fois l'augmentation de l'investissement

3) Calculez la valeur du multiplicateur d'investissement *k*.

Deux façons de calculer k :

1. $k = dYe / dI_0 = 1/(1-c) = 1/ 0,25 = 4$

2. k = (480 – 440) / (20 – 10) = 4

4) - On raisonne à nouveau à partir de l'équilibre initial et on suppose désormais que l'Etat intervient dans l'économie. Les relations macroéconomiques de ce secteur institutionnel sont décrites par :

G = 5 et T = 0.2Y + 4

Déterminez le revenu d'équilibre macroéconomique dans cette économie.

OG = Y et DG = C + I + G

A l'équilibre OG = DG donc Y = C + I + G

Ye = (0.75Yd + 100) + 10 +5

Ye = 0.75Yd +115

$Ye = 0.75(Ye - T) + 115$

$Ye = 0.75 (Ye - 0.2Ye – 4) + 115$

$Ye = 0.6Ye + 112$

$Ye = 280$ milliards

5) On suppose une augmentation de 20% des dépenses publiques. Déterminez la valeur du nouvel équilibre induite par l'augmentation des dépenses publiques et en déduire la valeur du multiplicateur de dépenses publiques.

$G' = 6$ et $\Delta G = 1$

$Ye' = 0.6Ye' + 112 + 1$

$Ye' = 0.6Ye' + 113$

$Ye' = 113/0.4 = 282.5$

$k = 1 / [1-c(1-t)] = 1/ 0.4 = 2.5$ ou $k = \Delta Y/\Delta G = 2.5/1 = 2.5$

3) Questions (6 points)

a- Quelle est la différence entre un oligopole et une situation de concurrence monopolistique ?

Une situation d'oligopole se rencontre lorsque sur un marché il y a un nombre très faible d'offreurs (vendeurs) et un nombre important de demandeurs (clients). On parle aussi de situation de marché oligopolistique. Il s'agit d'une situation de marché imparfait : dans le cadre de la concurrence pure et parfaite, les offreurs sont indépendants, alors que dans le cas d'un oligopole le profit de chaque producteur dépend de l'attitude des autres offreurs.

La concurrence monopolistique désigne une structure de marché où celui-ci est séparé en niches, chacune servie par un monopole local. Un tel cadre permet l'existence d'une forme de concurrence entre les monopoles ; les frontières entre les différentes niches étant endogènes, déterminées par l'action de chacun des monopoles. La concurrence monopolistique se rencontre sur des marchés de biens possédant une identité forte (image de marque, par exemple) qui fait d'un bien donné un substitut imparfait des autres. Cela s'applique ainsi aux vêtements de marque comme aux consoles de jeux vidéo.

b- Comment est calculée l'inflation ?

Pour mesurer l'inflation, on observe un « panier » représentatif de l'ensemble des biens consommés à partir duquel on construit un indice des prix à la consommation (IPC) qui permet d'apprécier la variation des prix. Le taux d'inflation est la variation en pourcentage de cet indice sur une période donnée : si le prix moyen du « panier » est passé de 100 à 102, l'inflation est de (102-100)/100 = 2/100 = 2%.

c- Quels sont les enjeux macroéconomiques de l'investissement ?

L'investissement, qui représente l'acquisition de machines et de moyens de production, est une nécessité pour les entreprises. Les équipements, qui s'usent, doivent être remplacés, mais l'entreprise doit aussi réaliser de nouveaux investissements pour se développer, ou plus simplement, maintenir son activité face à la concurrence.

L'investissement joue un rôle important dans l'économie car il se situe autant du côté de la demande que du côté de l'offre. En effet, l'investissement constitue une composante de la demande puisque l'entreprise qui investit fait travailler d'autres entreprises fabriquant les machines par exemple. La demande d'investissement stimule ainsi l'activité économique. Par ailleurs, l'investissement favorise l'offre de biens et de services puisqu'il permet de produire plus et mieux.

Ainsi, l'investissement a un effet multiplicateur sur la production nationale et génère de nouveaux emplois.

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

Pour conclure, il était proposé de compléter le tableau 2 de l'énoncé. On trouvera ci-dessous celui-ci complété (les chiffres que les candidats devaient trouver sont inscrits en italique)

	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**
	n_i	**p_i**	**np_i**	**(n_i-np_i)**	**$(n_i-np_i)^2$**	**(5)/(3)**
1	333	0,56250	337,5	-4,5	20,25	0,06
2	75	0,13125	78,75	-3,75	14,0625	0,18
3	42	0,05625	*33,75*	*8,25*	*68,0625*	*2,02*
4	117	0,18750	112,5	4,5	20,25	0,18
5	30	0,04375	*26,25*	*3,75*	*14,0625*	*0,54*
6	3	0,01875	11,25	-8,25	68,0625	6,05
Total	600	1,00000	600			*9,03*

Conclusion : la valeur calculée de 9,03 étant supérieure à la valeur donnée 5,99, il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation. On constate que le calcul opéré à la case n°6 (croisement des critères « clients n'ayant pas retourné la fiche » et « clients peu ou pas satisfaits ») contribue pour beaucoup à cette conclusion : c'est en effet là que l'écart est le plus fort

Question 2

La moyenne vaut 1,964 jours et la variance est égale à 1,955 jours^2

Question 3

Les candidats ont une grande marge de manœuvre pour le calcul. Le résultat devait être voisin de 1.520 interventions.

Question 4

T2 2018 – T2 2015 = (T2 2018 – T2 2017) + (T2 2017 – T2 2016) + (T2 2016 – T2 2015)
= (1440 - 1430) + (1380 – 1390) + (1350 - 1320)
= 10 – 10 + 30 = 30 interventions supplémentaires