

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : Les quatre exercices proposés sont indépendants.

Exercice 1

Partie 1

- On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

- On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- On note S_2 l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2, de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

Question 1

Calculer les produits AFA, AGA, AHA en fonction de F, G et H

Question 2

Montrer que S_2 est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de S_2 .

Déterminer la dimension de S_2

Question 3

On note u l'application qui à chaque matrice S de S_2 , associe la matrice $u(S) = ASA$

a) Montrer que $\forall S \in S_2, u(S) \in S_2$

b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel S_2

c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de S_2

Partie 2

- On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

Question 1

Vérifier que -4, 1 et 16 sont des valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

Question 2

Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle

Question 3

En déduire que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$

Question 4

Etablir que $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, ou e désigne l'application identité de S_2

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \sum_{k=1}^n kx^k$$

Question 1

Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, que l'on notera u_n

Question 2

Calculer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$

Question 3

Montrer que la suite (u_n) est décroissante

Question 4

Montrer que la suite (u_n) est convergente

Question 5

Montrer que $f_n(x) = x \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

Question 6

Calculer u_2 . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n)^n$

Question 7

Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 3

Trouver un équivalent, au voisinage de 2, de l'expression

$$y = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} - \frac{3}{2}$$

Exercice 4

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à p , $p \in]0,1[$

Soit N un entier naturel non nul fixé, on effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires X , Y et Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé ;
- X est le nombre de « piles » obtenus aux lancers de la pièce ;
- Y est le nombre de « faces » obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

Question 1

Préciser la loi de Z , son espérance et sa variance

Question 2

Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X=k / Z=n)$

On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$

Question 3

Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

$$\text{Si } 0 \leq k \leq n \leq N \text{ alors } P(X=k \text{ et } Z=n) = \binom{n}{k} \binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\text{Si } n > N \text{ ou si } k > n \text{ alors } P(X=k \text{ et } Z=n) = 0$$

Question 4

Calculer la probabilité $P(X=0)$

Question 5

Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$, on a

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$$

Question 6

En déduire la probabilité $P(X=k)$

Question 7

Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $(N, \frac{p}{6})$

Question 8

Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Comment interpréter la maxime « *Un esprit sain dans un corps sain* » ?

Sujet n° 2

Le continent africain est le mieux placé en matière de parité selon une étude¹ qui dresse le panorama du leadership au féminin à travers le monde. Illustrez ce constat et ses effets.

¹ Etude « *women in business 2018* » publiée par le cabinet Grant Thornton.

Sujet n° 3

Explicitez la citation de Nelson Mandela, homme d'Etat sud-africain, (1918-2013) « *Être libre, ce n'est pas seulement se débarrasser de ses chaînes ; c'est vivre d'une façon qui respecte et renforce la liberté des autres* ».

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

« La croissance en Afrique subsaharienne est-elle créatrice d'emplois ? »

Sujet 2

1) Exercice de microéconomie (7 points)

Un bien Q est produit à l'aide de deux facteurs de production, le travail (L) et le capital (K). A court terme, l'entreprise n'a pas la possibilité de changer son stock de capital. La production varie donc en fonction du nombre d'unités de facteur L (une unité de L correspond à une heure de travail ouvrier). La production réalisée est présentée dans le tableau ci-dessous :

Unités de travail L	Unités Produites Q
0	0
1	64
2	224
3	432
4	640
5	800
6	864
7	864
8	784

- 1- Calculez les valeurs de la productivité totale, la productivité moyenne et la productivité marginale de l'exemple proposé.
- 2- Donnez la représentation graphique des diverses courbes de productivité.

- 3- Quelle est la productivité horaire lorsque $L = 4$ et lorsque $L = 6$?
- 4- Que signifie l'existence d'une productivité marginale positive ? négative ? nulle ?
- 5- La valeur de la productivité marginale du facteur travail varie lorsque le nombre d'heures augmente. En vous appuyant sur l'exemple, montrer quel est le lien qui peut être établi entre la valeur et le sens de l'évolution de la productivité marginale du travail et ceux de la productivité totale ?

2) Exercice de macroéconomie (7 points)

Soit une économie imaginaire dans laquelle sont appliqués les principes keynésiens :

Y = revenu national, C = consommation nationale, I = investissement national

Les comportements de l'économie étudiée sont caractérisés par les équations suivantes :

$$C = cY + C_0$$

$$I = I_0$$

$C_0 = 100$ milliards de la monnaie de ce pays, $c = 0.75$ et $I_0 = 10$ milliards.

- 1- Calculez le revenu national d'équilibre Y_e .
- 2- I_0 passe de 10 milliards à 20 milliards, quantifiez l'effet sur le revenu d'équilibre.
- 3- Calculez la valeur du multiplicateur d'investissement k .
- 4- On raisonne à nouveau à partir de l'équilibre initial et on suppose désormais que l'Etat intervient dans l'économie. Les relations macroéconomiques de ce secteur institutionnel sont décrites par :

$$G = 5 \text{ et } T = 0.2Y + 4$$

Déterminez le revenu d'équilibre macroéconomique dans cette économie.

- 5- On suppose une augmentation de 20% des dépenses publiques. Déterminez la valeur du nouvel équilibre induite par l'augmentation des dépenses publiques et en déduire la valeur du multiplicateur de dépenses publiques.

3) Questions (6 points)

- a- Quelle est la différence entre un oligopole et une situation de concurrence monopolistique ?
- b- Comment est calculée l'inflation ?
- c- Quels sont les enjeux macroéconomiques de l'investissement ?

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Attention : le tableau 2 est à recopier et à compléter sur votre copie. Sinon, il vous faudra rendre ce document.

La société anonyme HAPI est spécialisée dans la vente d'appareils ménagers. Le dépannage des appareils en atelier est sous-traité à une entreprise extérieure non connue du client dans la mesure où la société HAPI a un service après-vente (S.A.V.) auquel s'adresse directement le client. Chaque intervention du S.A.V. donne lieu à l'envoi d'une fiche d'évaluation au client.

Le directeur de la qualité de HAPI a décidé de faire faire une étude sur les prestations du S.A.V. d'une des succursales. Un échantillon de 600 fiches d'intervention est prélevé sur les interventions sur des réfrigérateurs, dans le courant du premier trimestre 2016. Les tableaux 1 et 2 fournissent certains résultats de cette étude. Les informations relatives aux clients n'ayant pas retourné la fiche ont été obtenues par relance téléphonique.

Question n°1

Il vous est demandé, tout d'abord, d'analyser et de commenter le tableau 1 relatif au niveau de satisfaction des clients ayant demandé une réparation de réfrigérateur. Pour ce faire, il vous est suggéré d'analyser la dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation en complétant le tableau 2 et de commenter les résultats.

Tableau 1

Niveau de satisfaction des clients ayant demandé
une réparation de réfrigérateur

Clients	très satisfaits	satisfaits	peu ou pas satisfaits	Total
ayant retourné la fiche	333	75	42	450
n'ayant pas retourné la fiche	117	30	3	150
Total	450	105	45	600

Tableau 2
(à compléter)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)$	$(n_i - np_i)^2$	(5)/(3)
1	333	0,56250	337,5	-4,5	20,25	0,06
2	75	0,13125	78,75	-3,75	14,0625	0,18
3	42	0,05625				
4	117	0,18750	112,5	4,5	20,25	0,18
5	30	0,04375				
6	3	0,01875	11,25	-8,25	68,0625	6,05
Total	600	1,00000	600			

Afin de vous aider à conclure le test, il vous est proposé de comparer la valeur totale obtenue en colonne 6 avec la valeur 5,99. Si la valeur trouvée est supérieure à 5,99 il faut en conclure qu'il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation.

Question n°2

Sur les 600 interventions du S.A.V., 150 sont classés comme mineures parce qu'ayant entraîné un temps de réparation n'excédant pas une heure. Pour les autres, qualifiées de majeures, 35 d'entre elles ont pu être effectuées sur place et 215 ont été réparées en atelier. On ne s'intéressera, ici, qu'aux interventions majeures. Le nombre de jours qui séparent la date d'arrivée du technicien de celle du retour possible de l'appareil (la livraison pouvant être différée à la demande du client pour raison de convenance personnelle) est donné dans le tableau 3 et sera appelé « durée d'une réparation majeure ».

Tableau 3

Distribution des durées d'une réparation majeure

i		1	2	3	4	5	6	7	8	Total
x_i	Durée (en jours)	0	1	2	3	4	5	6	7	
n_i	Nombre de réfrigérateurs	35	70	66	44	22	10	2	1	250

Il vous est demandé de calculer la moyenne et la variance de la durée d'une réparation majeure.

Question n°3

Pour suivre l'évolution de la demande, le S.A.V. calcule, à la fin de chaque trimestre, le nombre total d'interventions majeures supérieures à 3 jours, au cours des douze mois qui viennent de s'écouler (ce qui permet d'éliminer l'incidence de la saisonnalité).

A partir des informations du tableau 4, il vous est demandé de fournir une prévision pour l'année civile 2019 en justifiant votre démarche.

Tableau 4

Nombre d'interventions des douze derniers mois

(données fin de trimestre)

	2016				2017				2018	
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Nombre d'interventions	1320	1350	1370	1400	1390	1380	1420	1410	1430	1440

Question n°4

A partir du tableau 4, il vous est demandé de donner le nombre d'interventions supplémentaires entre le deuxième trimestre 2015 et le deuxième trimestre 2018.