Avril 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Exercice 1.

Soient f et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f(x+\phi(y))$.

1. Par composition, F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x+\phi(y))\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \phi'(y)f'(x+\phi(y))$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x+\phi(y))\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \phi'(y)f''(x+\phi(y))\,.$$

On en déduit l'égalité demandée :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0\,.$$

Exercice 2.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b]$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Soit Φ la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a\ . \end{cases}$$

1. Il est clair que Φ est continue sur $]a,b]$ (comme rapport de deux fonctions continues). D'après les hypothèses et la définition de la dérivée à droite d'une fonction en un point, on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \Phi(x) = f'(a) = 0 = \Phi(0)\,.$$

D'où la contiuité de Φ au point a.

2. La fonction Φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, de plus $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$. Or pour tout $x \in]a,b[$

$$\Phi'(x) = \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a}\Big(f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Big).$$

Puisque $c \neq a$, $\Phi'(c) = 0 \Longrightarrow f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$. Ce qu'il fallait montrer.

Problème.

Dans tout le problème l'entier n est strictement positif ($n \geq 1$) et l'expression C_n^p désigne le nombre des parties ayant p éléments d'un ensemble de n éléments.

Partie I

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de polynômes définies par les relations suivantes :

$$U_n(x) = x^n(x-1)^n \,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}U_n(x)\,.$$

1. (i) On utilise la règle des équivalents : la fonction $f(x) = x^{a-1}(x-1)^k$ est définie et continue sur $]0,1]$, et au voisinage de 0, $f(x) \sim x^{a-1}$. Comme, de plus $a-1 > -1$; la fonction $x \mapsto x^{a-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. D'où l'intégrabilité de f sur $]0,1]$.

   (ii) On fixe $0 < b < 1$ et on effectue une intégration par parties sur le segment $[b,1]$, en posant $u(x) = (x-1)^k$, $v'(x) = x^{a-1}$, soit $u'(x) = k(x-1)^{k-1}$ (ce qui nécessite $k \geq 1$) et $v(x) = x^a/a$. On obtient

   $$\int_b^1 x^{a-1}(x-1)^k dx \;=\; \left[\frac{x^a}{a}(x-1)^k\right]_{x=b}^{x=1} - \frac{k}{a}\int_b^1 x^a(x-1)^{k-1}dx\,. \tag{1}$$

   La fonction $x \mapsto x^a(x-1)^{k-1}$ est intégrable sur $[0,1]$ car elle est continue $[0,1]$. La seconde intégrale admet donc une limite lorsque b tend vers 0, ce qui donne: $I_{a,k} = -\dfrac{k}{a}I_{a+1,k-1}$ si $k > 0$ et $I_{a,0} = 1/a$.

   (iii) On applique de nouveau la formule de la question précédente à $I_{a+1,k-1}$ (possible car $a+1 > 0$, et tant que $k-1 \geq 0$), ce qui donne:

   $$I_{a,k} = \frac{-k(-k+1)\cdots(-1)}{a(a+1)\cdots(a+k-1)}I_{a+k,0} \;=\; \frac{(-1)^k k!}{a(a+1)\cdots(a+k)}\,.$$

   (iv) L'intégrale de U_n correspond au cas particulier $a = n+1,\ k = n$:

   $$\int_0^1 U_n(x)dx = I_{n+1,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}\,.$$

   En multipliant par $n!$ au numérateur et au dénominateur, on obtient

   $$\int_0^1 U_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\frac{1}{C_{2n}^n}\,.$$

2. Le polynôme U_n est de degré $2n$, donc P_n est de degré $2n - n = n$. De plus $U_n(x) = x^{2n} + Q(x)$ où Q est un polynôme de degré $deg(Q) < 2n$, ce qui entraîne, en dérivant n fois, $U_n^{(n)}(x) = 2n(2n-1)\cdots(n+1)x^n + Q^{(n)}(x)$. Le coefficient dominant de P_n est donc $d_n = \dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = C_{2n}^n$.

3. (i) On a $U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}x^{n+k}$, en dérivant n fois, on obtient

   $$U_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!}x^k\,,$$

   soit

   $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!n!}x^k\,,$$

(ii) on utilise la formule de Leibnitz, ce qui est possible puisque les fonctions sont polynômiales, donc n fois dérivables:

$$\begin{aligned} U_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^n)^{(k)}((x-1)^n)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!}(x-1)^k \,, \end{aligned} \tag{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 x^{n-k}(x-1)^k \,. \end{aligned} \tag{3}$$

4. Sachant que le polynôme P_n est de degré n, on peut alors obtenir son coefficient dominant avec la seconde expression ; le monôme de degré n de $x^{n-k}(x-1)^k$ est x^n. Ainsi $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Partie II

Étant donnés deux réels a et b, strictement positifs ($a > 0, b > 0$), soit $J(a,b)$ l'intégrale suivante

$$J(a,b) \;=\; \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt \,.$$

1. La fonction $t \mapsto f(t) = t^{a-1}/(1+t^b)$ est définie sur $]0,1]$, continue, positive et dominée au voisinage de 0 par $1/t^{1-a}$; or la fonction $t \mapsto 1/t^{1-a}$ est continue sur $]0,1]$, positive et intégrable sur $]0,1]$ car $1-a < 1$. On peut alors appliquer la règle de domination : f est intégrable sur $]0,1]$.

2. Pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1+tb} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{nb}$, donc $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{nb+a-1}$.

   On pose pour $t \in [0,1[$, $w_n(t) = (-1)^n t^{nb+a-1}$. Pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{|w_{n+1}(t)|}{|w_n(t)|} = t^b < 1$ et donc la suite $(|w_n(t)|)_n$ décroît et converge vers 0. Par application du critère des séries alternées, on montre que la série $\sum w_n$ converge simplement sur $I = [0,1[$.

   Soit $0 < \delta < 1$. Le critère des séries alternées nous dit également que, pour tout $x \in [0,\delta]$,

$$|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_n(x)| \leqslant |w_{n+1}(x)| \leq |w_{n+1}(\delta)|.$$

   Puisque $\lim_{n\to+\infty} |w_{n+1}(\delta)| = 0$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,\delta]$, c'est à dire la série $\sum w_n$ converge uniformément sur $[0,\delta]$. D'après le théorème d'inversion de série et d'intégrale, on a

$$\int_0^\delta f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\delta (-1)^n t^{nb+a-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a} \,. \tag{4}$$

Le terme de gauche de cette dernière inégalité tend quand δ tend vers 1, vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.
Étudions maintenant la limite lorsque δ tend vers 1 du terme de droite. C'est encore une série alternée : posons $v_n(\delta) = (-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a}$, cette suite satisfait aux critères des séries alternées et on a $|R_n(\delta)| = |\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n(\delta)| \leq \frac{1}{(n+1)b+a}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
On en déduit que la série $\sum v_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. D'après le théorème d'inversion de série et de limite, on a alors $\displaystyle\lim_{\delta\to 1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{nb+a}$.
Le résultat est une conséquence de l'inégalite (4).

3. On considère le cas particulier $a=1$ et $b=3$: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+3n}$.
Pour calculer cette intégrale, on décompose la fraction rationnelle à intégrer en éléments simples, soit
$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{(t+1)} + \frac{1}{3}\frac{-t+2}{(t^2-t+1)}.$$
On cherche ensuite les primitives de chaque terme. Regardons le deuxième membre. Posons $u = t^2-t+1$ alors $u' = 2t-1$. Ainsi, $-t+2 = -\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}$ et $\frac{-t+2}{t^2-t+1} = -\frac{1}{2}\frac{u'}{u}+\frac{3}{2}\frac{1}{u}$.
On utilise aussi le fait que $u = (t-1/2)^2+3/4$ et $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctn}(t/a)$. Par conséquence
$$\int \frac{-t+2}{t^2-t+1}dt = -\frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctn}(2t-1)\sqrt{3}\,.$$
Ce qui donne $I = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Étant donné un réel a strictement compris entre -1 et 1 ($-1 < a < 1$), soit φ_a la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1,1[$ par la relation suivante :
$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4. La fonction $x \mapsto \varphi_a(x)$ est continue positive sur $]-1,1[$.
Au voisinage de -1, $\varphi_a(x) \sim \frac{1}{(1+a)\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$ et φ_a est dominée par $C_1(1+x)^{-1/2}$, où C_1 est une constante positive. Or la fonction $x\mapsto (1+x)^{-1/2}$ est définie,continue, positive sur $]-1,0]$, et y est intégrable. Donc φ_a est intégrable sur $]-1,0]$.
Au voisinage de 1, $\varphi_a(x) \sim \frac{1}{(1-a)\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ et φ_a est dominée par $C_2(1-x)^{-1/2}$, où C_2 est une constante positive. Or la fonction $x\mapsto(1-x)^{-1/2}$ est définie, continue, positive sur $]0,1]$, et y est intégrable. Donc φ_a est intégrable sur $]0,1]$.

Soit $K(a)$ l'intégrale de la fonction φ_a sur l'intervalle I :
$$K(a) = \int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}}dx\,.$$

5. De nouveau, il sagit d'effectuer une permutation série-intégrale, avec les mêmes problèmes que précédemment. Soient $-1 < a < 1$, $0 < \delta < 1$ et posons

$$K_\delta(a) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

Pour tout $x \in [-\delta, \delta]$ on a,

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ax)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

De plus, il existe une constante $C_\delta > 0$, tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, $|(ax)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}| \leq C_\delta a^n$ et $\sum_{n \in N} a^n = \frac{1}{1-a}$ est convergente. La série de terme général $Z_n = (ax)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ converge normalement, donc uniformément sur $[-\delta, \delta]$. On peut alors appliquer le théorème de permutation série-intégrale et on a

$$K_\delta(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

Lorsque l'entier n est impair, $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$ car la fonction intégrée est impaire. Donc

$$K_\delta(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{2n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

On applique de nouveau l'inversion de limite ($\delta \to 1$) et série comme précédement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $0 < \delta < 1$, $a^n \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq a^n \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ et $\sum_{n \in N} a^n = \frac{1}{1-a}$ est convergente. La série converge donc uniformément en $\delta \in [-1, 1]$. En appliquant le théorème d'inversion de limite et somme, et obtient

$$K(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k} \int_{-1}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

6. On utilise le résultat suivant du cours: pour tout réel α et $x \in]-1, 1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!} x^n\,.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On l'applique pour $\alpha = -1/2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)((-1/2)-1)((-1/2)-n+1)}{n!} (-1)^n x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)(3/2)((2n-1)/2)}{n!} x^{2n}\,.\end{aligned}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit des termes pairs de 2 à $2n$, il vient, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (2n)}{2^n \times (2 \times 4 \times \cdots \times (2n)) \times n!} x^{2n}\,.$$

Dans les termes pairs du dénominateur on factorise par 2, il vient,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

et pour tout $a \in]-1, 1[$,

$$K(a) = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} a^{2n} \, .$$

7. Si les sommes de deux séries entières sont égales sur un intervalle $]-a, a[$, avec $a > 0$, alors leurs coefficients sont égaux. Comme la question 5 a donné un développement en série entière de la fonction K. Par identification, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi C_{2n}^n}{2^{2n}} \, .$$

AVRIL 2019

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ ab & 0 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \end{pmatrix}$, où *a, b*, *c* sont des nombres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice *M*.

On a : $\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} a^2-\lambda & ab & b^2 \\ ab & -\lambda & ab \\ b^2 & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix}$. En soustrayant la troisième colonne à la première, puis en additionnant la troisième ligne à la première, on obtient :

$$\det(M-\lambda I) = (a^2-b^2-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 2ab & a^2+b^2-\lambda \\ 0 & -\lambda & ab \\ -1 & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+b^2-a^2)(-\lambda^2+(a^2+b^2)\lambda+2a^2b^2)$$

On obtient trois valeurs propres distinctes : $\lambda = a^2-b^2 \,;\, \lambda = \dfrac{(a^2+b^2)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, où $\Delta = a^4+b^4+10a^2b^2$

2. Déterminer les valeurs de a, b et c pour que M soit la matrice d'une projection orthogonale (que l'on précisera).

La matrice M étant symétrique, elle sera une matrice de projection orthogonale si et seulement si $M^2 = M$. On obtient : $M^2 = \begin{pmatrix} a^4+b^4+a^2b^2 & ab(a^2+b^2) & 3a^2b^2 \\ ab(a^2+b^2) & 2a^2b^2 & ab(a^2+b^2) \\ 3a^2b^2 & ab(a^2+b^2) & a^4+b^4+a^2b^2 \end{pmatrix}$, d'où le système :

$$\begin{cases} a^2 = a^4+b^4+a^2b^2 \\ ab = ab(a^2+b^2) \\ 0 = 2a^2b^2 \\ b^2 = 3a^2b^2 \end{cases}$$

Si a=0, alors b=0, et on a la matrice nulle.

Si b=0, alors $a^2 = 1$ *et* $a = \pm 1$(mais la valeur -1 ne convient pas), donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à la projection orthogonale (dans l'espace) sur le plan des axes Ox et Oz.

3. La matrice M peut-elle être associée à une symétrie orthogonale ?

On doit avoir $M^2 = I$, soit en particulier (cf. la question précédente) :

$\begin{cases} 2a^2b^2 = 1 \\ 3a^2b^2 = 0 \end{cases}$, ce qui est impossible. Par conséquent M ne peut être associée à une matrice de symétrie.

Exercice n° 2

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^n pour tout entier naturel n>1.

Cette matrice admet 1, 2 et 3 pour valeurs propres et comme elles sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Le sous espace vectoriel propre associée à 1 est engendré par : $e_1 = (1,0,0)$

Le sous espace vectoriel propre associée à 2 est engendré par : $e_2 = (1,1,0)$

Le sous espace vectoriel propre associée à 3 est engendré par : $e_3 = (1,2,2)$

La matrice de passage est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on vérifie que $P P^{-1} = I$).

On a : $A^n = P \Delta^n P^{-1}$ et on obtient : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & -2^n + (1+3^n)/2 \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Remarque : On pouvait penser à écrire : $A = \Delta + J$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La puissance de ces deux matrices est plus facile à calculer puisque : $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$;

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$. Mais la formule du binôme ne s'applique pas car $\Delta J \neq J \Delta$.

2. Déterminer les sous espaces vectoriels stables par *A*.

Un vecteur *u* est stable par *A* si $Au = \lambda u$ (ce qui correspond aux vecteurs propres).

Les sous espaces vectoriels stables par *A* sont donc : $\{0\}$, les 3 droites vectorielles engendrées respectivement par e_1, e_2, e_3, les 3 plans vectoriels engendrés par deux de ces vecteurs propres et enfin l'espace lui-même.

Exercice n° 3

On considère le système linéaire suivant : $\begin{cases} x + y + z - p\,x = 0 \\ x + y + z - q\,y = 0 \\ x + y + z - p\,z = 0 \end{cases}$, où (x, y, z) sont les inconnues réelles et (p, q) des paramètres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice associée au système.

La matrice du système est : $M = \begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-p \end{pmatrix}$, puis

$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-q-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-p-\lambda \end{vmatrix} = (p+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-q-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-p-\lambda \end{vmatrix}$ (en soustrayant la troisième colonne à la première) et

$\det(M-\lambda I) = (p+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-q-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-p-\lambda \end{vmatrix}$ (en additionnant la première ligne à la troisième). On obtient finalement : $\det(M-\lambda I) = -(p+\lambda)(\lambda^2 - \lambda(3-p-q) + pq - 2q - p)$

.

La matrice admet donc 3 valeurs propres réelles distinctes : $-p; \dfrac{3-p-q \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, où $\Delta = (p-q)^2 + 2(q-p) + 9 > 0$.

2. Déterminer les plus petits entiers non nuls (p,q) tels que l'espace vectoriel des solutions de ce système soit de dimension 1.

Si l'espace vectoriel des solutions est de dimension 1, forcément la déterminant de la matrice est nul (sinon l'origine serait la seule solution), mais cette condition n'est pas suffisante.

On a : $\det M = -p(pq-p-2q)$, soit $(pq-p-2q) = 0$ ou encore $p = \dfrac{2q}{q-1} (q \neq 1)$

Pour q=2, on trouve p=4. Il faut vérifier que c'est bien un espace de dimension 1. Et on obtient la droite vectorielle définie par : y=2x=2z.

3. On suppose que $q = p$. La matrice M est-elle inversible ? orthogonale ?

On obtient $\det M = p^2(3-p)$ et la matrice est inversible pour $p \neq 0$ et $p \neq 3$

Comme la matrice est symétrique, elle sera orthogonale si $M^2 = I$. L'élément de la première ligne et première colonne de M^2 est égal à $(1-p)^2 + 2$, ce qui ne peut être égal à 1. La matrice ne peut être orthogonale.

Exercice n° 4

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^3 + x - Ln\,x$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$

- Si 0<x<1, alors $-Ln\,x > 0$ et $f(x) > 0$

- Si x>1, on a : $f'(x) = 3x^2 + 1 - \frac{1}{x}$ et $f''(x) = 6x + \frac{1}{x^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$. Par conséquent $f(x) > 0$ pour tout x de I et l'équation n'admet pas de solution.

2. Calculer $I = \int_1^e f(x)\,dx$

On a : $I = \int_1^e f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x\,Ln\,x + x\right]_1^e = \frac{e^4 + 2e^2 - 7}{4}$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = e$ (nombre de Neper).

Soit $g(x) = f(x) - e$. Les dérivées de g sont les mêmes que pour f. La fonction g' est strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur R. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in]0,1[$, telle que : $g'(\alpha) = 0$ $(\alpha < 1)$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0, \alpha[$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$ et elle admet un minimum négatif en α (on a g(1)=2-e). L'équation admet donc deux solutions : l'une appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ ($\lim_{0^+} g = +\infty$) et l'autre à l'intervalle $]\alpha, +\infty[$, toujours d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \in I - Q \\ \dfrac{p}{p+q+1} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \in I \cap Q \end{cases}$$

où p et q sont des entiers premiers entre eux, q>0. Q désigne l'ensemble des nombres rationnels et $Q^* = Q - \{0\}$

1. Montrer que f est continue en zéro.

En effet f est continue en 0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Si $x \in I - Q$, on a : $f(x) = \dfrac{x}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$ et si $x \in I \cap Q^*, \left|\dfrac{p}{q}\right| < \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{x}{1+x+1/q}\right| \le |x|$.
La fonction f est donc continue en zéro.

2. Etudier la continuité de f sur $I \cap Q^*$

Soit $x_0 = \dfrac{p_0}{q_0} \in I \cap Q^*$, $\underset{x \in I-Q \to x_0}{Lim} f(x) = \underset{x \to x_0}{Lim} \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x_0}{1+x_0} \neq f(x_0) = \dfrac{x_0}{1+x_0+1/q_0}$, donc f n'est pas continue sur $Q^* \cap I$

3. Etudier la continuité de f sur $I - Q$

Montrons que f est continue sur $I - Q$. Elle est continue x_0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Si $x \in I - Q$, l'assertion précédente est vérifiée, car la restriction de f à $I - Q$ est continue.

Si $x = \dfrac{p}{q} \in I \cap Q^*$, alors

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{1+x+1/q} - \frac{x_0}{1+x_0}\right| = \frac{|x - x_0 - x_0/q|}{(1+x_0)(1+x_0+1/q+x-x_0)} \le \frac{|x-x_0| + |x_0|/q}{(1+x_0)^2/2}$$ dès que $|x - x_0| \le (1+x_0)/2$, car $1 + x_0 + \dfrac{1}{q} + x - x_0 \ge x_0 + \dfrac{1}{q} - |x - x_0| \ge \dfrac{1+x_0}{2}$

Considérons les nombres rationnels tels que $\dfrac{|x_0|}{q} \ge \dfrac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon$ ou $q \le \dfrac{4|x_0|}{(1+x_0)^2}\varepsilon$

Ces rationnels sont en nombre fini dans tout intervalle borné. Soit β le minimum de la distance de x_0 à ces points. On a alors pour $x \in I \cap Q^*$:

$$|x - x_0| \le Inf\left(\frac{1+x_0}{2}, \beta, \frac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon\right) = \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Exercice n° 6

Soient a et x deux nombres réels strictement positifs. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = a$; $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$; $b_0 = \frac{x}{a_0}$; $b_n = \frac{x}{a_n}$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite.

On vérifie aisément par récurrence que ces deux suites sont à termes strictement positifs. De plus $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, par conséquent elles seront monotones de sens contraire.

Si ces suites sont adjacentes, elle converge vers la même limite l, solution de l'équation : $l = \frac{x}{l}$ ou encore $l = \sqrt{x}$.

1) Si $a > \sqrt{x}$, on vérifie par récurrence que $a_n > \sqrt{x}$ pour tout n. Par conséquent $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{x} - a_n)(\sqrt{x} + a_n)}{a_n}\right) < 0$. La suite est décroissante, minorée par $\sqrt{x}$ et elle converge vers $\sqrt{x}$. La suite (b_n) est croissante majorée par $\sqrt{x}$. De plus $\underset{n\to\infty}{Lim}(a_n - b_n) = 0$ et les suites sont adjacentes.
2) Si $a < \sqrt{x}$, on a encore deux suites adjacentes, mais avec des monotonies inversées.

2. Soit la suite (x_n) définie par récurrence par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$. Etudier la convergence de cette suite.

- Si $x > 1$, on vérifie par récurrence que $x_n > 1$ pour tout n. Puis $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{x_n}} < 1$, la suite est donc décroissante et minorée par 1, donc convergente vers l solution de $l = \sqrt{l}$, soit l=1.

- Pour $0 < x < 1$, on arrive à la même conclusion par un raisonnement analogue.

3. On considère, pour a>0, les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = \sqrt{a\,x}$; $g(x) = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a})$. Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de points d'intersection des graphes de ces deux fonctions.

On a : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{a\,x} = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a}) \Leftrightarrow x - 2a\sqrt{a}\sqrt{x} + a^2 = 0$. En posant $t = \sqrt{x}$, on a l'équation : $t^2 - 2a\sqrt{a}\,t + a^2 = 0$ et $\Delta' = a^2(a-1)$. En conclusion :

- Si $a > 1$, l'équation admet deux racines et donc les graphes ont deux points d'intersection.

- Si $a=1$, l'équation admet une racine et donc les graphes ont un seul point d'intersection.

- Si $0<a<1$, l'équation n'admet pas de racines et donc les graphes n'ont pas de points d'intersection.

Exercice n° 7

Soient X une variable aléatoire réelle et f une fonction numérique définie par : $f(x)=k\,x\,e^{-\lambda x^2}$ sur l'ensemble des nombres réels positifs, où k et λ sont des paramètres réels strcitement positifs.

1. Déterminer k et λ pour que f soit une fonction de densité sur l'ensemble des nombres réels positifs.

Il faut que $\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^\infty k\,x\,e^{-\lambda x^2}\,dx=\left[-\frac{k}{2\lambda}e^{-\lambda x^2}\right]_0^\infty=\frac{k}{2\lambda}=1$ pour $k=2\lambda$.

2. On suppose que f est la fonction de densité de X. Calculer l'espérance de X (on rappelle que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

On a :

$$E(X)=\int_0^\infty x\,f(x)\,dx=2\lambda\int_0^\infty x^2\,e^{-\lambda x^2}\,dx=2\lambda\int_0^\infty x.x\,e^{-\lambda x^2}\,dx=2\lambda\left(\left[-\frac{1}{2\lambda}x\,e^{-\lambda x^2}\right]_0^\infty+\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}\,dx\right)=\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}\,dx$$

, d'où $E(X)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$

3. Etudier les variations et tracer le graphe de f (on étudiera en particulier sa convexité).

La dérivée de f est égale à : $f'(x)=2\lambda\,e^{-\lambda x^2}(1-2\lambda x^2)$ qui est nulle pour $x=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ avec $f(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}})=\sqrt{2\lambda}\,e^{-1/2}$. La fonction est croissante sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2\lambda}},+\infty\right[$.

La fonction est convexe pour $x>\sqrt{3/2\lambda}$ et concave sinon.