INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2019
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels et ln le logarithme népérien. On rappelle l'égalité, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \tag{1}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$

1. Calculer sous la forme la plus simple possible $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$.

   Il vient directement que

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} &= \ln \ln 4 - \ln \ln 2 \\
&= \ln(2 \ln 2) - \ln \ln 2 \\
&= \ln 2 + \ln \ln 2 - \ln \ln 2 \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

2. Donner le domaine de définition et la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$.

   f est définie sur $]0, 1/e[\cup]1/e, +\infty[$ et pour tout x de son domaine de définition,

$$f'(x) = \frac{3}{x\left(\ln x + 1\right)^2}$$

3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^{\frac{4x^3-1}{x^2}}$.

   Quand $x \to +\infty$, $(4x^3 - 1)/x^2 \to +\infty$ et donc $f(x) \to +\infty$.

4. Donner la limite en $x = 0$ de la fonction de la question précédente.

   Quand $x \to 0$, $(4x^3 - 1)/x^2 \to -\infty$ et donc $f(x) \to 0$.

5. Ecrire le nombre complexe $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

   $z = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x},$$

   expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

   f est de période π, et impaire. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, d'en déduire par parité l'étude sur $]-\pi/2, 0]$ puis de compléter par périodicité à l'ensemble de définition de f (c'est-à-dire $\mathbf{R}$ privé des points de la forme $\pi/2 + k\pi$, avec k entier).

7. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10. On sort trois boules simultanément. Donner la probabilité pour que le numéro d'au moins une de ces boules soit un multiple de 5.

   Il existe $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles de 3 de ces 10 boules. Comme les boules 5 et 10 sont les seules dont le numéro est un multiple de 5, il reste 8 boules dont les numéros ne sont pas des multiples de 5, et donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages possibles de 3 boules parmi ces 8. La probabilité qu'au moins une des boules tirées soit un multiple de 5 est donc

$$p = 1 - \frac{336}{720} = \frac{8}{15}.$$

8. Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$.

   En multipliant au nominateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on trouve

$$u_n = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

   et donc la suite (u_n) tend vers $1/2$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n}$$

pour $n \geq 1$. On admettra que $u_n < 1$ pour tout $n \geq 0$.
Montrer que la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique, et en déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

Un calcul sans problème montre que $v_{n+1} = v_n - 1/2$. Par conséquent, la suite (v_n) est une suite arithmétique tendant vers $-\infty$, et comme $u_n = 1 + 1/v_n$, on en déduit que u_n tend vers 1.

10. Résoudre l'equation $x^2 + ix + 1 = 0$ dans $\mathbf{C}$, puis dans $\mathbf{R}$.

Le discriminant de cette équation vaut -5 : les solutions dans $\mathbf{C}$ sont donc $i(-1+\sqrt{5})/2$ et $i(-1-\sqrt{5})/2$. Il n'y a pas de solution réelle.

Exercice 2

1. a étant un réel strictement positif, on considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

définie pour tout $x > 0$.

(a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

On se ramène à une équation du second degré dont l'unique solution positive est $x = \sqrt{a}$.

(b) Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies, et tracer le graphe de f dans le cas où $a = 4$.

La dérivée de f, définie pour tout $x > 0$, vaut

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$

et est donc négative pour $x < \sqrt{a}$, nulle en $\sqrt{a}$, et positive pour $x > \sqrt{a}$. On en déduit que f est décroissante sur $]0, \sqrt{a}[$, et croissante sur $]\sqrt{a}, +\infty[$. Un calcul immédiat montre qu'il y a une asymptote verticale d'équation $x = 0$, et que f tend vers l'infini en l'infini. Comme $f(x) - x/2$ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit l'asymptote oblique $y = x/2$, la courbe de f restant au-dessus de l'asymptote. Le graphe de f s'en déduit aisément.

2. On considère un nombre $u_0 > \sqrt{a}$ et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

(a) Déduire de la question précédente que pour tout n, $u_n > \sqrt{a}$.

Comme f est croissante sur $]\sqrt{a}, +\infty[$, partant de $u_0 > \sqrt{a}$, une récurrence immédiate prouve que si $u_n > \sqrt{a}$, $u_{n+1} = f(u_n) > f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ d'où le résultat

(b) Montrer que la suite (u_n) est monotone, et convergente vers une limite qu'on précisera.

D'après la question précédente, $f(u_n) < 1/2(u_n + u_n^2/u_n) = u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers une limite l vérifiant $f(l) = l$, et on tire de la première question que $l = \sqrt{a}$.

3. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \sqrt{a}$

(a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$.

Il suffit d'écrire v_{n+1} en fonction de u_n et de tout mettre au même dénominateur pour obtenir le résultat.

(b) En déduire que $v_n \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

Il suffit d'exprimer que $u_n > a$ dans l'égalité précédente, et de raisonner par induction.

4. Déduire de ce qui précède une méthode pour approcher numériquement la racine carrée d'un nombre donné.

Pour approcher numériquement $\sqrt{a}$, il suffit de partir d'une valeur $u_0 > \sqrt{a}$ (par exemple a si $a > 1$ ou 1 si $a < 1$), et d'itérer la suite u_n.

5. Montrer que si on veut approcher $\sqrt{5}$ par cette méthode en partant de $u_0 = 3$, la précision est meilleure que 10^{-4} dès la troisième itération.

En utilisant que $\sqrt{5} < 3$ et que $\sqrt{5}^{2^n} = 5^{2^{n-1}}$, on trouve que $v_3 < 3,75 \times 10^{-5} < 10^{-4}$, d'où le résultat.

Exercice 3

1. On considère la fonction ϕ qui à x associée

$$\phi(x) = \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

   (a) Donner le domaine de définition de la fonction ϕ ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine de définition.

   ϕ est définie sur $]0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$. Elle a pour limites $-\infty$ en 0^+, $+\infty$ en $1/2^-$, $-\infty$ en $1/2^+$, et $+\infty$ en $+\infty$.

   (b) Calculer la dérivée ϕ' de ϕ, et en déduire le tableau de variations de ϕ.

   Un calcul standard montre que

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

   On a donc immédiatement $\phi'(x) > 0$ pour tout x appartenant au domaine de définition de ϕ. Par suite, ϕ est croissante sur chacun des intervalles $]0, 1/2[$ et $]1/2, +\infty[$, d'où le tableau de variations.

   (c) Faire l'étude des branches infinies de ϕ

   ϕ admet deux asymptotes verticales, d'équations $x = 0$ et $x = 1/2$. De plus, en $+\infty$, $\phi(x)/x$ tend vers 0 en vertu de la croissance comparée du logarithme népérien et des fonctions puissances, donc ϕ y admet une branche parabolique de direction l'axe Ox.

   (d) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet deux solutions. Donner la solution évidente, et placer l'autre, qu'on notera α, par rapport à $1/2$.

   ϕ est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur chacun des intervalles $]0, 1/2[$ et $]1/2, +\infty[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc une fois sur chacun de ces intervalles. 1 est une solution évidente de l'équation $\phi(x) = 0$, l'autre solution α se trouve donc entre 0 et $1/2$.

2. On s'intéresse maintenant à la fonction f qui à $x > 0$ associe

$$f(x) = e^{\left(x-x^2\right)\ln x}.$$

   (a) Calculer $f'(x)$.

   Par un calcul standard,

$$f'((x) = \left[(1-2x)\ln x + 1 - x\right] e^{\left(x-x^2\right)\ln x}.$$

(b) En vous aidant de la partie précédente, déterminer le signe de $f'(x)$ selon la valeur de x.

$(1-2x)\ln x + 1 - x$ est du même signe que $\phi(x)$ si $x < 1/2$, et de signe contraire si $x > 1/2$. Par suite $f'(x)$ est négatif si $0 < x < \alpha$ ou $x > 1$, positif si $\alpha < x < 1$ (on vérifie directement que $f'(1/2) > 0$).

(c) Donner la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini, et en déduire la nature de la branche infinie correspondante.

On trouve directement que la limite de f en l'infini vaut 0, et que f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

(d) Dresser le tableau de variations de f.

Il se déduit des question précédentes, en notant que $f(1) = 1$, et que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

(e) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

comme $x \ln x$ tend vers 0 en 0, la limite de $f'(x)$ à droite de 0 vaut $-\infty$, et on a donc une demi-tangente verticale en ce point.

(f) Dessiner la courbe représentative de f.

Elle se déduit de ce qui précède.

Exercice 4

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 (on pourra remarquer que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

pour tout $x \in [0,1]$).

$I_0 = [\ln 2]_0^1 = \ln 2$.
Pour I_1, on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \ln(1+x)dx \\
&= [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \\
&= \ln 2 - 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \text{ (en utilisant l'indication de l'énoncé)} \\
&= \ln 2 - 1 + \ln 2 \\
&= 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

(b) Monter que, pour tout $n \geq 0$,
$$0 \leq I_n \leq \ln 2.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2$. Par suite,
$$\int_0^1 0 dx \leq I_n \leq \int_0^1 \ln 2 dx$$
d'où le résultat demandé.

(c) Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$, et en déduire qu'elle converge.

Pour tout $x \in [0,1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ donc $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$ d'où $I_{n+1} \leq I_n$: la suite est décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge.

2. Soit g la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

(a) Etudier le signe de g sur $\mathbf{R}^+$.
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$
qui est strictement négatif dès que $x > 0$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$, et comme $g(0) = 0$, $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

(b) En déduire la limite de la suite (I_n).

Si $x \in [0,1]$, $x^n \in [0,1]$ et d'après ce qui précède, $\ln(1+x^n) \leq x^n$. On en déduit que
$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
et comme $I_n \geq 0$, on conclut que
$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 2 = 0$, où λ désigne un paramètre réel.

Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda^2+2) = -3\lambda^2 - 8 < 0$. On en déduit que l'équation n'admet pas de solution réelle.

2. On considère la fonction de la variable réelle $f(x) = x^3 + 2x + 1$ et deux réels a et b tels que $f(a) = f(b)$.

(a) Montrer que $(a-b)(a^2+ab+b^2+2)=0$.

En développant, on trouve que $(a-b)(a^2+ab+b^2+2)=a^3-b^3+2a-2b=0$ puisque $f(a)=f(b)$.

(b) En déduire que $a=b$.

On a donc $f(a)-f(b)=(a-b)(a^2+ab+b^2+2)$. Par suite, si $f(a)=f(b)$, on a soit $a=b$, soit $a^2+ab+b^2+2=0$, ce qui est impossible d'après la première question : on en déduit donc que $a=b$.

Exercice 6 On considère deux nombres complexes $z_1=1-i$ et $z_2=2+\sqrt{3}+i$.

1. Ecrire z_1 sous forme trigonométrique.

   $z_1=\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)\right)$

2. Ecrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

   En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(1-i)(2+\sqrt{3}-i)}{(2+\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}-i)}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})^2+1}\\ &= \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}i)}{8+4\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{3}+i(3-\sqrt{3})\right)\\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\left(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)\right).\end{aligned}$$

3. En déduire la forme trigonométrique de z_2.

   On a $z_2=z_1/(z_1/z_2)$ et donc le module de z_2 est le quotient du module de z_1 par celui de z_1/z_2, et son argument est la différence de l'argument de z_1 et de celui de z_1/z_2. Tous calculs effectués, on trouve

$$z_2=(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)\right).$$

4. Donner la valeur de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

   En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de z_2, il vient

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

   et

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Dans une épreuve sportive, des dossards numérotés de 1 à n ont été distribués aléatoirement à n candidats, qui passeront l'épreuve dans l'ordre des numéros de dossards. Deux amis A et B participent à cette épreuve. On note n_A et n_B leurs numéros de dossards respectifs.

1. Combien y a-t-il de couples (n_A, n_B) possibles ?

   Il y en a $n(n-1)$.

2. Soit r un entier tel que $1 \leq r \leq n-1$. Montrer que $2(n-r)$ des couples de la question précédente vérifient $|n_A - n_B| = r$.

   Parmi les couples pour lesquels le dossard de B a un numéro inférieur à celui de A, pour avoir $n_A - n_B = r$, on a $(1, r+1), (2, r+2), \cdots, (n-r, n)$, soit $n-r$ possibilités. On en a évidemment autant si le dossard de A a un numéro inférieur à celui de B, d'où le résultat.

3. Quel est l'écart le plus probable entre n_A et n_B ?

   D'après ce qui précède, la probabilité pour que cet écart soit égal à r est

   $$p_r = \frac{2(n-r)}{n(n-1)}$$

   qui est maximum pour $r = 1$. Le plus probable est donc que les deux candidats partent immédiatement l'un derrière l'autre.

4. Quel est l'écart moyen entre n_A et n_B ?

   L'espérance E de l'écart entre n_A et n_B se calcule comme suit, en utilisant le rappel donné en début de l'énoncé :

   $$\begin{aligned} E &= \sum_{r=1}^{n-1} r \frac{2(n-r)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} r - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \\ &= \frac{2}{n-1} \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{3}. \end{aligned}$$

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper et *R* l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f\ (x) = x\,Ln\,x - 2x + e$$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La dérivée de la fonction est égale à : $f\ '(x) = Ln\,x - 1$ et elle s'annule pour $x = e$. Le graphe de *f* admet une branche parabolique dans la direction verticale. La fonction est strictement décroissante sur $]0, e]$ et croissante sur $[e, +\infty[$. On a : $f\,(e) = 0$. On peut prolonger la fonction par continuité à droite en zéro, en posant $f\ (0) = e$

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation suivante, où $a \in R$:

$$x\,Ln\,x - (2 + a)\,x = 0$$

L'équation devient $x(Ln\,x - (2 + a)) = 0$, soit $x = e^{2+a}$, on a donc une solution.

3. Calculer Pour $\alpha > 0$, Calculer $\underset{\alpha \to 0}{Lim} \int_\alpha^e f\ (x)\,dx$

$$\int_\alpha^e f\ (x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}Ln\,x - \frac{x^2}{4} - x^2 + ex\right]_\alpha^e = \frac{e^2}{4} - \left[\frac{\alpha^2}{2}Ln\,\alpha - \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2 + e\alpha\right] \to \frac{e^2}{4}$$

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur R par : $f\ (x) = x - \sqrt{1+x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est bien définie et sa dérivée est égale à :

$$f^{'}\ (x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}+x)} > 0$$

La fonction est donc strictement croissante de R sur $\left]-\infty, 0\right[$. Elle admet l'axe Ox et la droite d'équation y=2x, comme asymptotes ($f(x) \approx x + x\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)$ au voisinage de moins l'infini).

On a : $f(0) = -1$.

2. Etudier la convexité de f.

La dérivée seconde de f est égale à : $f^{''}\ (x) = -\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} < 0$ et la fonction est donc concave.

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 \in R$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f\ (u_n)$.

Comme la fonction f est continue, si la suite converge vers une limite l, elle est solution de l'équation : $l = f\ (l)$ ou encore $\sqrt{1+l^2} = 0$, ce qui est impossible, donc la suite (qui est décroissante) est divergente.

Exercice n° 3

Pour $x \in R$, on rappelle que la partie entière de x, notée $E(x)$, correspond au plus grand entier inférieur ou égal à x. Pour x non nul, on pose $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Calculer $I = \int_{1/2}^{2} f(x)\ dx$

On a : $I = \int_{1/2}^{2} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{1/2}^{1} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_{1}^{2} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{1/2}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = 3/8$

2. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} f\ (x)\,dx$

Pour x>1, la partie entière $E\left(\frac{1}{x}\right)$ est identiquement nulle, donc la limite demandée est nulle.

3. Expliciter f (sans l'expression de la partie entière) et étudier sa continuité sur R

Pour x>1, $E\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et $f(x)=0$, donc elle est continue ;

Pour x<-1, $E\left(\frac{1}{x}\right)=-1$ et $f(x)=-x$, donc elle est continue ;

En zéro, la fonction n'est pas définie ;

Pour $x\in\left]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$ avec k entier positif non nul, $E\left(\frac{1}{x}\right)=k$ et $f(x)=kx$, donc elle est continue ;

Pour $x\in\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right[$ avec k entier négatif non nul, $E\left(\frac{1}{x}\right)=k+1$ et $f(x)=(k+1)x$, donc elle est continue ;

Pour $x=\frac{1}{k}$, la limite à droite est différente de la limite à gauche et la fonction est non continue.

Exercice n° 4

1. Résoudre dans C (ensemble des nombres complexes), l'équation : $\frac{z-2}{z-1}=i$

On pose $z=x+i\,y$ pour obtenir : $(x-2)+i\,y=i\,(x-1)-y$, d'où $x-2=-y; x-1=y$ et $z=\frac{1}{2}(3+i)$

2. Soient M, A et B les points d'affixes respectives z, 1 et 2. On suppose que M est distinct de A et B.

- Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\frac{z-2}{z-1}$;

Le module correspond au rapport de longueur des deux segments $\frac{BM}{AM}$ et l'argument à l'angle entre $\vec{MB}$ et $\vec{MA}$

- Retrouver géométriquement la solution de la première question.

La solution de l'équation correspond à l'intersection entre la médiatrice de AB (x=3/2) et du demi-cercle tel que $(\vec{MA},\vec{MB})=\frac{\pi}{2}$.

3. Résoudre dans C, l'équation : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2=i$

On procède comme dans la première question pour obtenir d'abord x puis y. On obtient deux solutions : $z_1=\frac{3}{2}+i\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$; $z_2=\frac{3}{2}+i\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercice n° 5

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on définit les fonctions f_n sur R par : $f_n(x) = x^n e^{x^2}$

1. Etudier les variations de f_1 et tracer son graphe.

La dérivée est égale à : $f_1^{'}(x) = e^{x^2}(2x^2+1) > 0$ et la fonction est impaire et strictement croissante de R sur R avec une branche parabolique dans la direction Oy.

2. Comparer les graphes de f_{2n} et f_{2n+1}.

Le graphe de f_{2n} est symétrique par rapport à l'axe Oy et le graphe de f_{2n+1} est symétrique par rapport à l'origine. Les deux graphes admettent une branche parabolique dans la direction Oy.

Une différence : la pente de la tangente à l'origine est égale à 1 pour f_{2n+1} et nulle pour f_{2n}.

3. Pour p entier strictement positif fixé, étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 > 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_p(u_n)$.

On a évidemment $u_n > 1$. Si la suite est convergente, $u_n \to l$, alors $l = f_p(l)$ et $l \geq 1$, d'où $l^{p-1} e^{l^2} = 0$ est impossible .La suite (u_n), strictement positive et croissante, ne peut pas converger vers une limite finie, elle tend vers l'infini.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

On a : $0 < \int_0^1 f_n(x)\,dx < e\int_0^1 x^n\,dx = \frac{e}{n+1} \to 0$

Exercice n° 6

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (a+2)(u_n+1)$, où a est un paramètre réel.

1. Déterminer a pour que cette suite soit constante.

Si la suite est constante, on a : $u_n = (a+2)(u_n+1) = (a+2)(2) = 1$, soit $a = -3/2$

2. Déterminer a pour que cette suite soit une suite arithmétique (on en précisera la raison).

Pour une suite arithmétique, on a : $u_{n+1} = (a+2)(u_n+1) = u_n + r$, soit $a = -1; r = 1$

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) pour $a > 0$.

La suite (u_n) est toujours strictement positive et si elle converge, sa limite l vérifie : $l = (a+2)(l+1)$, d'où $l = -\frac{a+2}{a+1} < 0$. Par conséquent la suite n'est pas convergente. On peut remarquer qu'elle est croissante $u_{n+1} - u_n = (a+1)u_n + a + 2 > 0$ et non majorée, donc elle tend vers plus l'infini.

Exercice n° 7

On dispose de 3 dés (chaque dé a 6 faces) : les faces du premier dé sont numérotées de 1 à 6, le deuxième dé possède trois faces numérotées 1 et 3 faces numérotées 2, enfin le troisième dé a de deux faces avec 1, deux faces avec 2 et deux faces avec 3.
On jette les trois dés ensemble et on suppose que chaque dé tombe sur une face.

1. Soit *X* la variable aléatoire égale à la somme des points des 3 dés. Déterminer la loi de probabilité de *X*.

La loi de probabilité est :

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p (X)	1/36	3/36	5/36	6/36	6/36	6/36	5/36	3/36	1/36

2. Calculer l'espérance de *X*. Ce résultat est-il prévisible ?

L'espérance de *X* est donnée par : $E(X) = \sum_{i=3}^{11} x_i \; p(X = x_i) = 7$. Ce résultat était prévisible car cette distribution discrète avec un nombre impair de valeurs est symétrique.

3. Un joueur mise une unité monétaire sur *X*.
Si *X*=3 ou 11, il reçoit 3 unités ;
Si *X*=4 ou 10, il reçoit 1,5 unités ;
Si *X*=5 ou 9, il reçoit 1/2 unité ; sinon il ne reçoit rien.
Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Ce jeu est-il réaliste ?

L'espérance de gain est égale à : $\frac{1}{36}(3\times 2+1{,}5\times 6+10\times 0{,}5-18)=1/18$
Ce jeu n'est pas réaliste car dans tous les jeux d'argent l'espérance de gain des joueurs est négative.