ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par : $x \to f(x) = e^{-x} \sin x$.
1) Calculer les 4 premières dérivées de f : f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$.
2) En déduire une primitive de f.
3) Calculer $J = \int_0^{\pi} f(x)dx$.

1) $f'(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x)$
$f''(x) = -2 e^{-x} \cos x$
$f^{(3)}(x) = 2 e^{-x} (\cos x + \sin x)$
$f^{(4)}(x) = -4 e^{-x} \sin x$

2) On remarque que $f^{(4)}(x) = -4 e^{-x} \sin x = -4f(x)$, ou $f(x) = -f^{(4)}(x)/4$
Comme la dérivée de $f^{(3)}$ est $f^{(4)}$, $-f^{(3)}(x)/4 = -e^{-x} (\cos x + \sin x)/2$ est une primitive de f.

3) $J = [-f^{(3)}(\pi) + f^{(3)}(0)]/4 = (1 + e^{-\pi})/2$

Exercice 2

On appelle nombre palindrome tout nombre pouvant être lu de façon identique de gauche à droite et de droite à gauche.
Par exemple, 44 est un nombre palindrome à deux chiffres ; 373 est un nombre palindrome à trois chiffres ; 2552 ou 8008 sont des palindromes à quatre chiffres, etc …

On pose les conventions suivantes :
1 - on considère que chaque chiffre de 0 à 9 est un palindrome

2 - les nombres uniquement composés de 0 (par exemple 00, 000, 0000, etc) ne sont pas pris en compte, car il ne s'agit en réalité que du chiffre 0
3 - aucun nombre palindrome de n chiffres (avec n > 2) ne peut commencer par 0 : ainsi, par exemple, 0440 n'est pas un nombre palindrome à quatre chiffres car il s'agit en réalité de 440, nombre à trois chiffres qui n'est pas un palindrome (440 n'est pas égal à 044 = 44).

1) Exemples de dénombrement
1a) Combien y a-t-il de nombres palindromes de deux chiffres ?
1b) Combien y a-t-il de nombres palindromes de trois chiffres ?
1c) Combien y a-t-il de nombres palindromes de quatre chiffres ?

2) Généralisation des dénombrements de palindromes
2a) Soit n un nombre pair, n = 2p.
Combien y a-t-il de nombres palindromes de 2p chiffres ?
2b) Soit n un nombre impair (n > 3), n = 2p +1.
Combien y a-t-il de nombres palindromes de 2p+1 chiffres ?

3) Combien y a-t-il de nombres palindromes strictement inférieurs à 1 000 000 ?

1) Exemples
1a) Un nombre palindrome à deux chiffres s'écrit aa, avec a allant de 1 à 9 (puisque 00 = 0 est exclu par convention). Il y a donc 9 nombres palindromes de 2 chiffres

1b) Un nombre palindrome à trois chiffres s'écrit aba, avec a = 1 à 9 et b = 0 à 9.
On a donc 9 choix pour a et 10 pour b, soit un total de 90 nombres palindromes de 3 chiffres.

1c) Un nombre palindrome à quatre chiffres s'écrit abba, avec a = 1 à 9 et b = 0 à 9.
On a donc 9 choix pour a et 10 pour b, soit un total de 90 nombres palindromes de 3 chiffres.

2) Généralisation
2a) Les p premiers chiffres ne peuvent pas commencer par 0 ; donc il n'y a que 9 possibilités pour le premier chiffre (de 1 à 9), et 10 possibilités pour les (p – 1) autres chiffres.
Soit donc un total de $9.10^{p-1} = 9.10^{n/2-1}$ pour n pair.

2b) 2p+1 = p premiers chiffres + chiffre central + p derniers chiffres
Comme précédemment, il y a 9 choix possibles pour le premier chiffre (de 1 à 9), 10 pour les (p – 1) suivants, 10 pour le chiffre central (de 0 à 9).
Soit donc un total de $9.10^{p-1}.10 = 9.10^{p} = 9.10^{(n-1)/2}$ pour n pair.

3) Le plus grand nombre palindrome strictement inférieur à 1 000 000 est égal à 999999, donc composé de 6 chiffres.
Le nombre recherché, P, est donc égal à n(1) + n(2) + n(3) + n(4) + n(5) + n(6), n(k) étant égal au nombre de palindromes à k chiffres.
Par convention, on sait que n(1) = 10
n(2), n(4) et n(6) sont donnés par la formule établie à la question 2a : n(2) = 9 ; n(4) = 90 ; n(6) = 900.
n(3) et n(5) sont donnés par la formule établie à la question 2b : n(3) = 90 ; n(5) = 900.

P = 10 + 9 + 90 + 90 + 900 + 900 = 1999

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

Partie I

On considère la fonction h définie sur R^*_+ par : $x \to h(x) = e^x / x$

Etudier très précisément les variations de h : signe des dérivées première et seconde, concavité, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variation, allure générale du graphe.

Notation : par la suite, on notera par H une primitive de h ; on ne cherchera pas à en donner l'expression.

Calculs détaillés :
$h'(x) = e^x(x - 1)/x^2$; s'annule pour x = 1
$h''(x) = x.e^x[(x - 1)^2 + 1]/x^4$
On remarque que h" > 0, pas de racine (et donc pas de point d'inflexion).
La fonction h est strictement convexe.
Limites : h(x) → +∞ quand x tend vers0 et quand x → +∞
Pas d'asymptote : y/x → +∞ (branche parabolique).

Pour x = 1, la valeur du minimum est m = e.

x	0		1		+ ∞
h'		-	0	+	
h	+ ∞	↘	m = e	↗	+ ∞

Partie II

Soit la famille de fonctions $h_{\alpha,\beta}$ définie sur R*+, ensemble des nombres réels strictement positifs, par :

$$x \rightarrow h_{\alpha,\beta}(x) = x^{\alpha}.e^{\beta x}$$

où α et β sont deux paramètres réels.

On désire étudier les variations de $h_{\alpha,\beta}$ selon les valeurs de α et β.

1) Etudier les variations de $h_{\alpha,\beta}$ (sens de variation, limites éventuelles en 0 et en +∞, etc ...) dans les cas particuliers suivants :
1a) $\alpha = 0$ et $\beta = 0$
1b) $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$
1c) $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$

1a) $h_{0,0}(x) = 1$; droite horizontale

1b) $h_{0,\beta}(x) = e^{\beta x}$
Classe des fonctions exponentielles
Si $\beta > 0$, fonctions croissantes, $h_{0,\beta}(x)$ est monotone croissante, $\lim_{x\to0+} h_{0,\beta}(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} h_{0,\beta}(x) = +\infty$.
Si $\beta < 0$, fonctions décroissantes, $h_{0,\beta}(x)$ est monotone décroissante, $\lim_{x\to0+} h_{0,\beta}(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} h_{0,\beta}(x) = 0$.

1c) $h_{\alpha,0}(x) = x^{\alpha}$
Classe des fonctions « puissance »
Si $\alpha > 0$, fonctions croissantes, $h_{0,\beta}(x)$est monotone croissante, $\lim_{x\to0+} h_{\alpha,0}(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} h_{\alpha,0}(x) = +\infty$.
Si $\alpha < 0$, fonctions décroissantes, $h_{0,\beta}(x)$ est monotone décroissante, $\lim_{x\to0+} h_{\alpha,0}(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h_{\alpha,0}(x) = 0$.

2) On suppose maintenant α et β non nuls.
2a) Calculer $h'_{\alpha,\beta}$, dérivée première de $h_{\alpha,\beta}$.

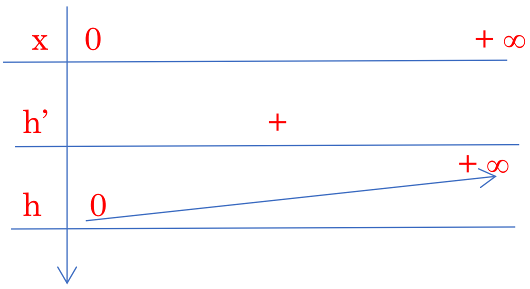
2b) Dans quels cas, basés sur les signes de α et β, la fonction $h_{\alpha,\beta}$ est-elle monotone croissante, monotone décroissante, admet-elle un minimum m, un maximum M ?
Donner, dans chaque cas, les limites de $h_{\alpha,\beta}$ en 0 et en +∞.
Lorsque $h_{\alpha,\beta}$ tend vers une limite finie quand x tend vers 0, étudier en fonction de α et β l'existence et la valeur de $h'_{\alpha,\beta}$ en 0.
Etablir le tableau de variations de $h_{\alpha,\beta}$ dans chaque cas.
Quelle est la valeur de l'extremum m ou M de $h_{\alpha,\beta}$ lorsqu'il existe ?

2a) $h'_{\alpha,\beta}(x) = x^{\alpha-1}.e^{\beta x}\,(\alpha + \beta x)$

2b) $h'_{\alpha,\beta}(x) = 0 \leftrightarrow x = -\,\alpha/\beta$

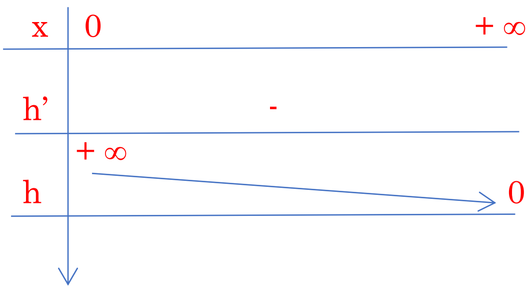
Comme $x > 0$:
La nullité de $h'_{\alpha,\beta}(x)$ n'est réalisée que si $-\,\alpha/\beta > 0$, c'est-à-dire α et β de signes opposés : $(\alpha > 0, \beta < 0)$ ou $(\alpha < 0, \beta > 0)$. Il y a alors existence d'un extremum.
Si $(\alpha > 0, \beta > 0)$ ou $(\alpha < 0, \beta < 0)$, la racine de h' est négative ; or $x > 0$. Donc impossible pour $h'_{\alpha,\beta}$ de s'annuler. La fonction $h_{\alpha,\beta}$ est monotone.
Quatre cas, selon α et β, sont ainsi identifiés :
$(\alpha > 0, \beta > 0)$, $(\alpha < 0, \beta < 0)$, $(\alpha > 0, \beta < 0)$, $(\alpha < 0, \beta > 0)$.

Plus précisément :
Cas n°1 : $(\alpha > 0, \beta > 0)$: $h' > 0$, h est croissante, $\lim_{x\to 0+} h_{\alpha,\beta}(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} h_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$.



Pente à l'origine :
- Si $\alpha = 1$, la pente est égale à 1
- Si $\alpha < 1$, pente ∞
- Si $\alpha > 1$, pente 0

Cas n°2 : $(\alpha < 0, \beta < 0)$: $h' < 0$, h est décroissante, et on a : $\lim_{x\to 0+} h_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h_{\alpha,\beta}(x) = 0$.



Cas n°3 : $(\alpha > 0, \beta < 0)$: $h' > 0$ entre 0 et $-\,\alpha/\beta$, $h' < 0$ entre $-\,\alpha/\beta$ et $+\infty$, donc h est croissante entre 0 et $-\,\alpha/\beta$, est décroissante entre $-\,\alpha/\beta$ et $+\infty$, $\lim_{x\to 0+} h_{\alpha,\beta}(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} h_{\alpha,\beta}(x) = 0$. Existence d'un maximum M.

x	0		$-\alpha/\beta$		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

Pente à l'origine :

- Si $\alpha = 1$, la pente vaut 1
- Si $\alpha < 1$, pente ∞
- Si $\alpha > 1$, pente 0

Cas n°4 : ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) : $h' < 0$ entre 0 et $-\alpha/\beta$, $h' > 0$ entre $-\alpha/\beta$ et $+\infty$, h est décroissante entre 0 et $-\alpha/\beta$, croissante entre $-\alpha/\beta$ et $+\infty$, $\lim_{x\to 0+} h_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$. Existence d'un minimum m.

x	0		$-\alpha/\beta$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que, seulement dans les cas 3 et 4, ($\alpha > 0$, $\beta < 0$) et ($\alpha < 0$, $\beta > 0$), il existe un extremum : un maximum M dans le cas 3, un minimum m dans le cas 4.

Sa valeur est : $M = m = \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\alpha} > 0$

On peut remarquer, en outre, comme M et m sont >0, dans les cas ($\alpha > 0$, $\beta < 0$) et ($\alpha < 0$, $\beta > 0$), que la fonction $h_{\alpha,\beta}$ est positive.

3) Calculer $h''_{\alpha,\beta}$ dérivée seconde de $h_{\alpha,\beta}$.
Etudier, selon α et β, les conditions d'existence d'éventuelles solutions de l'équation $h''_{\alpha,\beta}(x) = 0$.

Un calcul simple conduit à :
$h''_{\alpha,\beta}(x) = x^{\alpha-2}.e^{\beta x}\,[\alpha(\alpha - 1) + 2\,\alpha\,\beta x + \beta^2x^2)]$

Racines de $h''_{\alpha,\beta}(x)$: solutions de l'équation $\alpha(\alpha - 1) + 2\,\alpha\,\beta x + \beta^2x^2 = 0$
$\Delta' = \alpha\,\beta^2$

- Si $\alpha < 0$ (cas n°2 et n°4), l'équation n'a pas de solution, quel que soit β

- Si $\alpha > 0$ (cas n°1 et n°3), l'équation a deux solutions r(1) et r(2) :

$r(1) = (\sqrt{\alpha} - \alpha)/\beta$
$r(2) = -(\sqrt{\alpha} + \alpha)/\beta$

Etudions alors les diverses situations possibles, <u>en rappelant que x > 0</u>.

a) $\alpha > 0, \beta > 0$
   r(2) < 0 donc n'est pas admissible
   Pour r(1) :
   - Si $\alpha < 1$, r(1) > 0, donc pas de solution
   - Si $\alpha \geq 1$, $r(1) \leq 0$ donc pas de solution (pour $\alpha = 1$, r(1) = 0)

b) $\alpha > 0, \beta < 0$
   r(2) > 0 donc est admissible
   Pour r(1) :
   - Si $\alpha < 1$, r(1) < 0, non admissible
   - Si $\alpha = 1$, r(1) = 0
   - Si $\alpha > 1$, r(1) > 0 admissible

Partie III

On considère la fonction f définie sur R^*_+ par :

$$x \rightarrow f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$$

1) Pour tout x > 0, exprimer f en fonction de H.
En déduire que f est dérivable sur R^*_+.
Donner l'expression de f', dérivée première de f.

f(x) = H(x) – H(1)
H étant dérivable, $f'(x) = H'(x) = h(x) = e^x / x$

2) Donner la valeur de f(1).
f(1) = 0

3) Pour tout réel $x \geq 1$, montrer que : $e.\mathrm{Ln}(x) \leq f(x)$.
En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Il est évident que $e^t \geq e$

Donc $f(x) \geq e \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) dt = e\mathrm{Ln}x$

D'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4) Pour tout réel $x > 0$, montrer que : $f(x) \leq e^x.\mathrm{Ln}(x)$
En déduire $\lim_{x \to 0+} f(x)$.

On a : $t \leq x$, donc $e^t \leq e^x$ et $f(x) \leq e^x \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) dt = e^x.\mathrm{Ln}x$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$

5) Donner le tableau de variation de f.

x	0	1	$+\infty$
f'		+	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

6) Soit F la courbe représentant f dans un repère orthonormé usuel.
Montrer que l'équation $f''(x) = 0$, où f'' est la dérivée seconde de f, admet une solution x^* que l'on explicitera.
Soit A le point de f dont les coordonnées sont $(x^*, f(x^*))$. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe F au point A.

$f'(x) = e^x/x$

$f''(x) = e^x (x - 1)/x^2$

$f''(x) = 0$ pour $x^* = 1$. Le point A a donc pour abscisse 1, et pour ordonnée $f(1) = 0$.
Equation de la tangente en A :
$(y - 0)/(x - 1) = f'(1) = e$
$y = e(x - 1)$

Partie IV

1) Montrer que, pour tout entier n positif ou nul, il existe un réel unique u(n) vérifiant la relation (R) :

$$\text{(R)} \quad f(u(n)) = n$$

f est monotone, continue et dérivable ; elle admet un inverse f^{-1} également monotone croissante : $u(n) = f^{-1}(n)$. D'où le résultat.

2) On considère la suite u(n) définie par la relation (R) de la question précédente.
2a) Donner la valeur de u(0).
2b) Etudier, pour $n \geq 0$, la suite u(n) : croissance, décroissance, limite.

$u(0) = 1$
$f(u(n)) = n$
$f(u(n+1)) = n + 1$
$f(u(n)) < f(u(n+1))$
En composant par f^{-1}, on obtient $u(n) < u(n+1)$; la suite u(n) est donc croissante.
Elle diverge vers $+\infty$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème n° 1

Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré n, à coefficients dans Z, espace des nombres entiers relatifs.
$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ est un polynôme de E_n.
1) On suppose que P admet une racine r appartenant à Z.
Montrer que r divise a_0.
2) Le polynôme $x^3 – x^2 – 109x – 11$ a-t-il au moins une racine dans Z ?
3) Même question pour le polynôme $x^{10} + x^5 + 1$.

1) $P(r) = 0$ donc $r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$, soit :
$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \ldots + a_1 r = - a_0$.
En factorisant :
$r(r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + a_{n-2} r^{n-2} + \ldots + a_1) = - a_0$

On en déduit que r divise $– a_0$.

2) En appliquant le résultat de la question 1 :
si le polynôme $P(x) = x^3 – x^2 – 109x – 11$ a au moins une racine r dans Z, r divise 11.
Comme 11 est un nombre premier, r = +/- 1 ou +/-11.
On calcule :
$P(1) = - 120$
$P(-1) = 96$
$P(11) = 0$
$P(-11) = - 264$

D'où r = 11.

3) Toujours en utilisant le résultat de la question 1, si le polynôme $P(x) = x^{10} + x^5 + 1$ a au moins une racine r dans Z, r divise - 1.
Donc r = +/- 1.
P(1) = 3
P(-1) = 1

D'où P n'a pas de racine entière relative.

Problème n° 2

Soit un réel x ; on définit la partie entière de x, notée E(x), comme étant le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est-à-dire que E(x) vérifie la double inégalité :

$$\forall x \in R, E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Pour $x \in J = [-1, 2]$, on définit la fonction f par : $x \to f(x) = E(x).\sin(\pi x)$.

1) Donner les expressions de f quand x appartient aux intervalles A = [-1, 0[, B = [0, 1[, C = [1, 2].

Pour tout x dans A, E(x) = - 1 et f(x) = - sin(πx)
Dans B, E(x) = 0 et f(x) = 0
Dans C – {2}, E(x) = 1 et f(x) = sin(πx)
En x = 2, E(x) = 2 et f(2) = 2sin(2π) = 0

2) Etudier la continuité de f sur J.

La question se pose aux points 0 et 1.
En 0 : quand $x \to 0+$, f(x) → 0 (la fonction f est nulle sur l'intervalle B).
Quand $x \to 0^-$, f(x) = - sin(πx) tend vers 0.
Donc continuité en 0.

En 1 : quand x → 1+, f(x) = sin(πx) → 0 ; quand $x \to 1^-$, f(x) = 0.
Donc continuité en 1.

En 2 : quand $x \to 2^-$, f(x) = sin(πx) → 0 ; f(2) = 0 donc continuité en 2.

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

En 0 : la pente en 0+ est 0.
Sur A, f'(x) = - π.cos(πx) → - π quand $x \to 0^-$
Donc f n'est pas dérivable en 0.

En 1 : la pente en 1- est 0.
Sur C, f'(x) = π.cos(πx) → - π quand x → 1+
Donc f n'est pas dérivable en 1.

4) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle J, et tracer l'allure générale de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	-1		-1/2		0		1/2		1		3/2		2
h'		+	0	-			0			-	0	+	
h	0	↗	1	↘	0		nulle		0	↘	-1	↗	0

5) Calculer les intégrales U = $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ et V = $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

U = 2/π
Compte tenu des expressions de f sur chaque intervalle A, B et C (ou de la symétrie de f), on a : V = 0

Problème n° 3

On considère la suite réelle u(n), définie sur N, par :

$$u(0) = \frac{1}{2}$$

$$u(n) = \frac{e^{u(n)}}{u(n)+2}$$

1) Soit la fonction f : I = [0, 1] → R, définie par :

$$x \to f(x) = \frac{e^x}{x+2}$$

Etudier la fonction f.

Montrer que, pour tout x ∈ I : $|f'(x)| < \frac{2}{3}$.

f'(x) = (x+1)e^x/$(x+2)^2$ (> 0)

f''(x) = (x+2)e^x[$(x+2)^2$ - 2(x+1)]/$(x+2)^4$ = e^x[$(x+1)^2$ +1] / $(x+2)^3$ (> 0)

Tableau de variation :

x	0		1
f''		+	
f'	1/4	↗	2e/9
f	1/2	↗	e/3

f' prend la valeur maximale 2e/9 en x = 1.
Or e < 3 donc 2e/9 < 2/3
Donc f' < 2/3

2) Montrer que, ∀ n ∈ N, u(n) ∈ I.

Vrai pour n = 0 (u(0) = ½).
Supposons vrai au rang n ; u(n+1) = f(u(n)) ; compte tenu des variations de f (question 1), f prend ses valeurs entre ½ et e/3 (<1), le résultat est vrai au rang n+1.

3) Montrer que l'équation f(x) = x admet une et une seule solution sur I ; cette solution sera notée a.

Soit g(x) = f(x) – x ; g'(x) = f'(x) – 1 = (x+1)e^x/$(x+2)^2$ -1 ; g''(x) = f''(x)
Tableau de variation de g

x	0	a	1
g''		+	
g'	-3/4	- ↗	(2e-9)/9
g	½	↘ 0	(e-3)/3

g est décroissante de ½ en 0 à (e-3)/3 en 1 ; or (e-3)/3 < 0.
g étant monotone décroissante, et continue, positive en 0 et négative en 1, il existe donc une et une seule valeur a telle que g(a) = 0 ou f(a) = a.

4) Démontrer que, pour tout entier n, on a l'inégalité suivante :

$$|u(n+1) - a| \leq \frac{2}{3}\, |u(n) - a|.$$

En déduire la nature de la suite u(n) et sa limite éventuelle.

D'après le théorème des accroissements finis en a :

$|f(u(n) – f(a)| \leq \frac{2}{3}\, |u(n) - a|$

puisque $|f'|$ est majorée par 2/3 (question 1)

On en déduit $|f(u(n) – f(a)| = |u(n+1) – (a)| < (2/3)^n.(1/2)$

car on peut majorer $|u(0) - a|$ par ½.

Donc la suite est convergente quand n → +∞, et u(n) → a.

Problème n° 4

On considère l'ensemble M_2 des matrices carrées à coefficient réels.

Soit A une matrice de M_2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & d \end{pmatrix}$$

1) A quelles conditions portant sur a, b et d la matrice A est-elle inversible ?

Det A = a(d – b) ≠ 0 si a ≠ 0 et b ≠ d

2) On prend a = 1, b = - 1 et d = -1.

Calculer A^n pour tout entier n ≥ 2.

Un calcul simple montre que $A^2 = 0$, matrice nulle.

D'où $A^n = 0$ pour tout n ≥ 2.

3) On prend a = 1 et b = d, b et d ≠ - 1.

Calculer A^2.

En déduire l'expression générale de A^n en fonction de b, A et n, pour n ≥ 1.

$A^2 = (1+b).A$

On établit aisément par récurrence que $A^n = (1+b)^{n-1}.A$

4) On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans N – {0}, suit une loi de probabilité géométrique de paramètre p, $0 < p < 1$, si pour k entier naturel non nul, la probabilité élémentaire de X est donnée par $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}.p$; on note G(p) la loi géométrique. On pose $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y, suivant toutes les deux la loi géométrique G(p) pour un paramètre fixé $p \in]0,1[$. De plus on suppose que X et Y sont indépendantes, c'est-à-dire que $\forall$ j, k $\in$ N, $P(X = j, Y = k) = P(X = j).P(Y = k)$.

Soit H la matrice de forme générale :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

E désigne l'événement « la matrice H est inversible ».

4a) D'après la question 1, à quelle condition la matrice H est-elle inversible ?

H est inversible pour $X \neq Y$

4b) Ecrire $P(X = Y)$ en fonction de $P(X = k)$ et $P(Y = k)$.

$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k).P(Y = k)$

puisque les v.a. X et Y sont indépendantes.

On en déduit $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$

4c) Calculer l'expression $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1}$ en posant $a = q^2$

On en déduit $p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1} = p^2/(1 - a) = p^2/(1 - q^2) = p^2/(1 - q)(1 + q) = p/(1 + q)$ puisque $q = 1 - p$

4d) En déduire la probabilité P(E) de l'événement E.

$P(E) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$

$P(E) = 1 - [p/(1 + q)] = 2q/(1 + q)$