ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Si être conformiste signifie se conformer aux usages, accepter les manières de penser ou d'agir du plus grand nombre, et suivre les normes sociales, pensez-vous qu'être conformiste est une attitude condamnable ?

Sujet n° 2

Winston Churchill a dit : « *Un peuple qui oublie son passé se condamne à le revivre.* » Selon vous, pour quelles raisons un peuple devrait-il ou ne devrait-il pas oublier son passé ?

Sujet n° 3

Protéger l'environnement, limiter les formes de pollutions, est-ce uniquement un problème de pays riches ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque au choix du candidat. Le problème comporte quatre parties.

Exercice n° 1

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par : $x \to f(x) = e^{-x} \sin(x)$.

1) Calculer les 4 premières dérivées de f : f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$.
2) En déduire une primitive de f.
3) Calculer $J = \int_0^{\pi} f(x)dx$.

Exercice n° 2

On appelle nombre palindrome tout nombre pouvant être lu de façon identique de gauche à droite et de droite à gauche.
Par exemple, 44 est un nombre palindrome à deux chiffres ; 373 est un nombre palindrome à trois chiffres ; 2552 ou 8008 sont des palindromes à quatre chiffres, etc …

On pose les conventions suivantes :
1 - on considère que chaque chiffre de 0 à 9 est un palindrome
2 - les nombres uniquement composés de 0 (par exemple 00, 000, 0000, etc) ne sont pas pris en compte, car il ne s'agit en réalité que du chiffre 0
3 - aucun nombre palindrome de n chiffres (avec n > 2) ne peut commencer par 0 : ainsi, par exemple, 0440 n'est pas un nombre palindrome à quatre chiffres car il s'agit en réalité de 440, nombre à trois chiffres qui n'est pas un palindrome (440 n'est pas égal à 044 = 44).

1) Exemples de dénombrement
1a) Combien y a-t-il de nombres palindromes de deux chiffres ?
1b) Combien y a-t-il de nombres palindromes de trois chiffres ?
1c) Combien y a-t-il de nombres palindromes de quatre chiffres ?

2) Généralisation des dénombrements de palindromes
2a) Soit n un nombre pair, n = 2p.
Combien y a-t-il de nombres palindromes de 2p chiffres ?
2b) Soit n un nombre impair (n > 3), n = 2p +1.
Combien y a-t-il de nombres palindromes de 2p+1 chiffres ?

3) Combien y a-t-il de nombres palindromes strictement inférieurs à 1 000 000 ?

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

Partie I

On considère la fonction h définie sur R^*_+ par : $x \rightarrow h(x) = e^x / x$.

Etudier très précisément les variations de h : signe des dérivées première et seconde, convexité, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variation, allure générale du graphe.

Notation : par la suite, on notera par H une primitive de h ; on ne cherchera pas à en donner l'expression.

Partie II

Soit la famille de fonctions $h_{\alpha,\beta}$ définie sur R^*_+, ensemble des nombres réels strictement positifs, par :

$$x \rightarrow h_{\alpha,\beta}(x) = x^{\alpha}.e^{\beta x}$$

où α et β sont deux paramètres réels.

On désire étudier les variations de $h_{\alpha,\beta}$ selon les valeurs de α et β.

1) Etudier les variations de $h_{\alpha,\beta}$ (sens de variation, limites éventuelles en 0 et en +∞, etc …) dans les cas particuliers suivants :
1a) $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
1b) $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$.
1c) $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$.

2) On suppose maintenant α et β non nuls.
2a) Calculer $h'_{\alpha,\beta}$, dérivée première de $h_{\alpha,\beta}$.

2b) Dans quels cas, basés sur les signes de α et β, la fonction $h_{\alpha,\beta}$ est-elle monotone croissante, monotone décroissante, admet-elle un minimum m, un maximum M ?
Donner, dans chaque cas, les limites de $h_{\alpha,\beta}$ en 0 et en +∞.
Lorsque $h_{\alpha,\beta}$ tend vers une limite finie quand x tend vers 0, étudier en fonction de α et β l'existence et la valeur de $h'_{\alpha,\beta}$ en 0.
Etablir le tableau de variations de $h_{\alpha,\beta}$ dans chaque cas.
Quelle est la valeur de l'extremum m ou M de $h_{\alpha,\beta}$ lorsqu'il existe ?

3) Calculer $h''_{\alpha,\beta}$ dérivée seconde de $h_{\alpha,\beta}$.
Etudier, selon α et β, les conditions d'existence d'éventuelles solutions de l'équation $h''_{\alpha,\beta}(x) = 0$.

Partie III

On considère la fonction f définie sur R^*_+ par :

$$x \rightarrow f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt.$$

1) Pour tout x > 0, exprimer f en fonction de H.
En déduire que f est dérivable sur R^*_+.
Donner l'expression de f', dérivée première de f.

2) Donner la valeur de f(1).

3) Pour tout réel $x \geq 1$, montrer que : $e.Ln(x) \leq f(x)$.
En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4) Pour tout réel $x > 0$, montrer que : $f(x) \leq e^x.Ln(x)$
En déduire $\lim_{x \to 0+} f(x)$.

5) Donner le tableau de variation de f.

6) Soit F la courbe représentant f dans un repère orthonormé usuel.
Montrer que l'équation $f''(x) = 0$, où f'' est la dérivée seconde de f, admet une solution x* que l'on explicitera.
Soit A le point de f dont les coordonnées sont (x*, f(x*)). Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe F au point A.

Partie IV

1) Montrer que, pour tout entier n positif ou nul, il existe un réel unique u(n) vérifiant la relation (R) :

$$\text{(R)} \quad f(u(n)) = n$$

2) On considère la suite u(n) définie par la relation (R) de la question précédente.
2a) Donner la valeur de u(0).
2b) Etudier, pour $n \geq 0$, la suite u(n) : croissance, décroissance, limite.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Après avoir analysé les principales théories sur les dynamiques de croissance dans les économies développées, émergentes ou en développement, vous discuterez l'affirmation suivante de Philippe Aghion :

«Il faut que l'État joue un rôle dans l'éducation, la formation et aussi dans l'organisation du marché du travail pour permettre une flexibilité, mais une flexibilité et une mobilité qui soient qualifiantes. Et là l'État a un rôle très important à jouer donc il ne s'agit pas du tout d'une politique de laisser faire où l'État se retire et fait confiance entièrement aux agents privés. L'État a un rôle très important à jouer pour protéger et permettre et favoriser la mobilité sociale, ce qui aide à la fois à réduire les inégalités et en même temps à accroître la croissance par l'innovation».

Sujet 2

Après avoir rappelé les principales théories relatives au fonctionnement du marché du travail, vous analyserez les déterminants des politiques d'emploi dans les pays en développement à partir du constat dressé par « La Banque Mondiale » en septembre 2018 :

« *Les pays en développement sont confrontés, à des degrés divers, à trois principaux défis :*

1. *Créer plus d'emplois. Environ 600 millions d'emplois devront être créés au cours des 15 prochaines années pour faire augmenter les taux d'emploi et absorber les jeunes*

qui entrent sur le marché du travail. Cela implique de soutenir la croissance du secteur privé.

2. *Améliorer la qualité des emplois. Avoir un emploi ne suffit pas. C'est le fait d'avoir un emploi plus productif et de bénéficier de bonnes conditions de travail et d'une protection sociale qui fait la différence. Il est donc indispensable de créer autant d'emplois formels que possible tout en améliorant la productivité et les salaires dans le secteur informel. L'économie informelle représente en effet la première source de revenus pour la majeure partie de la population des pays à faible revenu.*

3. *Connecter les travailleurs aux emplois. Tous les actifs ne disposent pas des mêmes opportunités sur le marché du travail : les femmes, les jeunes et les plus pauvres sont défavorisés. C'est pourquoi il faut lutter contre toutes les formes de discriminations et de barrières à l'emploi et veiller à ce que les travailleurs possèdent les compétences dont le marché du travail a besoin.* »

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème n° 1

Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré n, à coefficients dans Z, espace des nombres entiers relatifs.
$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ est un polynôme de E_n.
1) On suppose que P admet une racine r appartenant à Z.
Montrer que r divise a_0.
2) Le polynôme $x^3 - x^2 - 109x - 11$ a-t-il au moins une racine dans Z ?
3) Même question pour le polynôme $x^{10} + x^5 + 1$.

Problème n° 2

Soit un réel x ; on définit la partie entière de x, notée E(x), comme étant le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est-à-dire que E(x) vérifie la double inégalité :

$$\forall\, x \in R,\ E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Pour $x \in J = [-1, 2]$, on définit la fonction f par : $x \to f(x) = E(x).\sin(\pi x)$.

1) Donner les expressions de f quand x appartient aux intervalles A = [-1, 0[, B = [0, 1[, C = [1, 2].

2) Etudier la continuité de f sur J.

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

4) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle J, et tracer l'allure générale de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

5) Calculer les intégrales U = $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ et V = $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

Problème n° 3

On considère la suite réelle u(n), définie sur N, par :

$$u(0) = \frac{1}{2}$$

$$u(n) = \frac{e^{u(n)}}{u(n)+2}$$

1) Soit la fonction f : I = [0, 1] → R, définie par :

$$x \to f(x) = \frac{e^x}{x+2}.$$

Etudier la fonction f.

Montrer que, pour tout x ∈ I : $|f'(x)| < \frac{2}{3}$.

2) Montrer que, ∀ n ∈ N, u(n) ∈ I.

3) Montrer que l'équation f(x) = x admet une et une seule solution sur I ; cette solution sera notée a.

4) Démontrer que, pour tout entier n, on a l'inégalité suivante :

$$|u(n+1) - a| \leq \frac{2}{3}\ |u(n) - a|.$$

En déduire la nature de la suite u(n) et sa limite éventuelle.

Problème n° 4

On considère l'ensemble M_2 des matrices carrées à coefficient réels.
Soit A une matrice de M_2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & d \end{pmatrix}$$

1) A quelles conditions portant sur a, b et d la matrice A est-elle inversible ?

2) On prend $a = 1$, $b = -1$ et $d = -1$.
Calculer A^n pour tout entier $n \geq 2$.

3) On prend $a = 1$ et $b = d$, b et $d \neq -1$.
Calculer A^2.
En déduire l'expression générale de A^n en fonction de b, A et n, pour $n \geq 1$.

4) On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $N - \{0\}$, suit une loi de probabilité géométrique de paramètre p, $0 < p < 1$, si pour k entier naturel non nul, la probabilité élémentaire de X est donnée par $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}.p$; on note G(p) la loi géométrique. On pose $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y, suivant toutes les deux la loi géométrique G(p) pour un paramètre fixé $p \in]0,1[$. De plus on suppose que X et Y sont indépendantes, c'est-à-dire que $\forall$ j, $k \in N$, $P(X = j, Y = k) = P(X = j).P(Y = k)$.

Soit H la matrice de forme générale :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

E désigne l'événement « la matrice H est inversible ».

4a) D'après la question 1, à quelle condition la matrice H est-elle inversible ?

4b) Ecrire $P(X = Y)$ en fonction de $P(X = k)$ et $P(Y = k)$.

4c) Calculer l'expression $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$.

4d) En déduire la probabilité P(E) de l'événement E.