ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier l'existence de solutions à des systèmes différentiels. Les parties sont complètement indépendantes. La partie I traite de l'existence de solutions pour des systèmes linéaires. La partie II traite de l'existence de solutions pour des systèmes non-linéaires. Enfin la partie III étudie un système non-linéaire d'équations différentielles proposé par Lotka et Volterra pour l'étude des populations d'espèces animales.

Partie I

1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
Le discriminant $\Delta = 0$, donc une seule racine double -1. Les solutions élémentaires sont $x \mapsto \exp(-x)$ et $x \mapsto x\exp(-x)$ de dérivées $x \mapsto -\exp(-x)$ et $x \mapsto \exp(-x) - x\exp(-x)$. Donc on cherche A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $A = 1$ et $-A + B = 1$. Donc $A = 1$ et $B = 2$. D'où la solution $x \mapsto \exp(-x)(1 + 2x)$.

2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = -t$$

telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
Puisqu'on a déjà résolu l'équation homogène associée, on cherche une solution particulière, ou on utilise la variation de la constante. Évidemment la fonction $x \mapsto -x + 2$ est solution particulière. On cherche donc A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $A + 2 = 1$ et $-A + B - 1 = 1$. Donc la solution est $x \mapsto \exp(-x)(x-1) - x + 2$ de dérivées $x \mapsto \exp(-x)(2-x) - 1$ et $x \mapsto \exp(-x)(x-3)$ d'où

$$e^{-x}(x-3) + 2e^{-x}(2-x) - 2 + e^{-x}(x-1) - x + 2 = e^{-x}(x - 3 + 4 - 2x + x - 1) - x = -x.$$

3. Soit f la fonction définie par
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t, x) & \mapsto & tx \end{array}.$$
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ vérifiant $y(0) = \alpha$.
On applique Cauchy-Lipschitz. La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. On peut résoudre explicitement en remarquant $y'/y = t$ implique $y(t) = \alpha \exp(t^2/2)$ qui est définie globalement sur tout $\mathbb{R}$.
4. Sans chercher à la calculer explicitement, montrer que, pour un triplet de données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution au système différentiel suivant :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & y \\ y' & = & -z \\ z' & = & y - x + z \end{array} \right. \qquad \text{vérifiant} \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \\ z(0) & = & z_0 \end{array} \right. .$$
Le système est linéaire à coefficients constants, donc il existe une unique solution au problème de Cauchy, étant donnée une condition initiale.
5. Calculer une solution explicite au système différentiel précédent pour un triplet de données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
Il faut diagonaliser la matrice. Le polynôme caractéristique est $(X-1)(X^2+1)$, donc les valeurs propres sont $\{1, i, -i\}$. On cherche les vecteurs propres pour diagonaliser, donc on résout les systèmes suivants :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y \\ y & = & -z \\ z & = & y - x + z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccc} ix & = & y \\ iy & = & -z \\ iz & = & y - x + z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccc} -ix & = & y \\ -iy & = & -z \\ -iz & = & y - x + z \end{array} \right.$$
dont des solutions sont par exemple
$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & i \\ z & = & 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & -i \\ z & = & 1 \end{array} \right.$$
On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $PDP^{-1} = M$, où M est la matrice du système différentiel, et D la matrice diagonale contenant les valeurs propres. Ainsi
$$\left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = DP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right.$$

Donc $P^{-1}(x(t),y(t),z(t))^T = \exp(tD)P^{-1}(x_0,y_0,z_0)^T$, soit encore

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1+i & -2i & 1-i \\ 1-i & 2i & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^t & e^{it} & e^{-it} \\ e^t & ie^{it} & -ie^{-it} \\ -e^t & e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1+i & -2i & 1-i \\ 1-i & 2i & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^t + 2\cos(t) - 2\sin(t) & 4\sin(t) & -2e^t + 2\cos(t) + 2\sin(t) \\ 2e^t - 2\sin(t) - 2\cos(t) & 4\cos(t) & -2e^t - 2\sin(t) + 2\cos(t) \\ -2e^t + 2\cos(t) - 2\sin(t) & 4\sin(t) & 2e^t + 2\cos(t) + 2\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

On peut éviter tout ce calcul en remarquant que $u := (x-z)$ vérifie $u' = u$, donc $u(t) = (x_0 - z_0)e^t$. Et ainsi on se ramène à $x' = y$ et $y' = u - x$. Soit encore $x'' = y' = u - x$ dont les solutions sont

$$x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{(x_0 - z_0)}{2}e^t$$

avec $x(0) = A + \frac{(x_0 - z_0)}{2} = x_0$ et $y(0) = x'(0) = B + \frac{(x_0 - z_0)}{2}$ donc $A = \frac{(z_0 + x_0)}{2}$ et $B = \frac{(z_0 - x_0)}{2} + y_0$. On trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(z_0 + x_0)}{2}\cos(t) + \left(y_0 + \frac{(z_0 - x_0)}{2}\right)\sin(t) + \frac{(x_0 - z_0)}{2}e^t \\ y(t) &= -\frac{(z_0 + x_0)}{2}\sin(t) + \left(y_0 + \frac{(z_0 - x_0)}{2}\right)\cos(t) + \frac{(x_0 - z_0)}{2}e^t \\ z(t) &= \frac{(z_0 + x_0)}{2}\cos(t) + \left(y_0 + \frac{(z_0 - x_0)}{2}\right)\sin(t) - \frac{(x_0 - z_0)}{2}e^t \end{aligned}$$

6. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pour que le système différentiel précédent n'admette que des solutions périodiques.
Il faut que les projections sur l'élément de base e^t soient nulles. La périodicité étant respectée par changement de base, on peut chercher une condition pour les solutions sous la forme (x,y,z) ou sous la forme $P^{-1}(x,y,z)$. On trouve tout simplement $x_0 = z_0$. On peut le trouver en utilisant la question précédente et la solution explicite, mais si on n'a pas la solution explicite, on peut aussi résoudre l'équation suivante :

$$(1,0,0)P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0 \iff (1,0,0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1+i & -2i & 1-i \\ 1-i & 2i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (2,0,-2)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0 \iff x_0 = z_0$$

Partie II

Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence de solutions pour des systèmes non-linéaires posés sous la forme d'un problème de Cauchy. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne de constante de Lipschitz $L \in \mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

7. Montrer que si f est globalement lipschitzienne, alors la constante

$$L_f := \inf\{L \in \mathbb{R} : \forall\, x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\}$$

existe.
L'ensemble est évidemment minoré par 0, donc c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$, elle admet donc un inf.

8. Montrer que f est lipschitzienne pour la constante de Lipschitz L_f.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(L_f + \frac{1}{n}\right)|x - y|.$$

On passe à la limite quand $n \to +\infty$ dans le membre de droite, les inégalités sont conservées, et on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f|x - y|,$$

donc L_f est une constante admissible.

9. Montrer que la fonction suivante est globalement lipschitzienne :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\sin(x))^3 \end{array}.$$

Par inégalité des accroissements finis

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}} |f'(z)|\ |x - y|.$$

Or $f'(z) = 3\cos(z)\sin^2(z)$ est majorée par 3.

10. Trouver le maximum et le minimum de

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy^2 \end{array}$$

sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
On a $\partial_x G = y^2$ et $\partial_y G = 2xy$. On cherche donc les points critiques de $G(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Ainsi $y^2 + 2\lambda x = 0$ et $2xy + 2\lambda y = 0$. Donc $x = -\lambda$ et $y = \sqrt{2}|\lambda|$. En ces points critiques $G(x, y) = -2\lambda^3$ et $\lambda^2 + 2\lambda^2 = 1$ implique $G(x, y) = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}}$. On peut aussi chercher les extrema de $x(1 - x^2)$ qui sont atteints quand $1 - 3x^2 = 0$, ce qui fournit la même solution.

11. En déduire la plus petite constante de Lipschitz de f.
Il s'agit d'améliorer la majoration de la dérivée de f dans les accroissements finis en utilisant la question précédente. La constante optimale supposée étant $L_f := \frac{2}{\sqrt{3}}$ (attention au facteur 3 dans f'), il faut montrer que pour toute constante $L < L_f$, il existe des points x et y tels que $L - |f(x) - f(y)|/|x-y| < 0$.
Soit $z = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en posant $z_n = z + \frac{1}{n}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sin(z))^3 - (\sin(z_n))^3}{z - z_n} = f'(z) = 3\cos(z)\sin(z)^2 = 3\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{|f(z) - f(z_n)|}{|z - z_n|}\right| < \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - L\right)/2 > 0$, alors en l'indice $N \in \mathbb{N}$ on obtient

$$\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{|f(z) - f(z_N)|}{|z - z_N|}\right| < \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - L\right)/2$$

donc en enlevant les valeurs absolues du membre de gauche, et en ajoutant $L - \frac{2}{\sqrt{3}}$ dans chaque membre, on obtient la contradiction voulue pour les points $x := z$ et $y := z_N$.

$$L - \frac{|f(z) - f(z_N)|}{|z - z_N|} < \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - L\right)/2 + L - \frac{2}{\sqrt{3}} = \left(L - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)/2 < 0.$$

12. Montrer qu'il existe des solutions aux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y' &= (\sin(y))^3 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z' &= (\sin(z))^3 \\ z(0) &= \pi \end{cases}.$$

Par les questions précédentes, la fonction f est globalement Lipschitz, donc il existe des solutions aux deux problèmes de Cauchy précédents. On remarque que le deuxième problème admet la fonction constante égale à π comme solution.

13. Montrer que la solution y du premier problème vérifie pour tout $t \geq 0$

$$0 < y(t) < \pi.$$

La solution constante égale à 0 et la solution constante égale à π sont deux solutions des problèmes de Cauchy issus respectivement de 0 et π. Comme y ne peut pas intersecter ces deux courbes, elle reste forcément comprise entre ces deux bornes.

14. Montrer que la solution y du premier problème vérifie pour tout $t \geq 0$

$$y'(t) \leq L_f\ (\pi - y(t)).$$

On pose $w(t) := y(t) - z(t)$ alors

$$y'(t) = w'(t) = \sin(y)^3 - \sin(z)^3 \leq L_f|y(t) - z(t)| \leq L_f(\pi - y(t)).$$

Partie III

On fixe des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ strictement positives et on considère des données initiales (x_0, y_0) dans le quadrant $Q := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0, b \geq 0\} = \mathbb{R}_+^2$. On appelle système de Lotka-Volterra, le système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& \alpha x(t) - \beta x(t) y(t), \\ y'(t) &=& -\gamma y(t) + \delta x(t) y(t), \\ x(0) &=& x_0, \\ y(0) &=& y_0. \end{array} \right.$$

On admet que ce système admet une unique solution (x, y), définie sur $\mathbb{R}$. De plus on admet que si deux solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2) du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& \alpha x(t) - \beta x(t) y(t), \\ y'(t) &=& -\gamma y(t) + \delta x(t) y(t), \end{array} \right.$$

coïncident en un temps $t_0 \in \mathbb{R}$ alors elles sont égales.

15. Montrer que si (x, y) est une solution de donnée initiale $(x_0, y_0) \in Q$, on a $(x(t), y(t)) \in Q$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Indication : Pour ce faire, on pourra considérer le premier instant $t^* \geq 0$ pour lequel $y(t^*) = 0$ (ou de manière symétrique $x(t^*) = 0$), et étudier les solutions qui partent de données initiales situées sur les axes des ordonnées ou des abscisses.
Les solutions $(x^* \exp(t\alpha), 0)$ et $(0, y^* \exp(-t\gamma))$ sont des solutions de problèmes de Cauchy issus de $(x^*, 0)$ et $(0, y^*)$. Donc si la solution démarre sur un des axes, alors elle y reste. Soit $(x(t), y(t))$ la solution issue de (x_0, y_0) qui ne serait pas sur un axe. S'il existe un instant $t^* \geq 0$ tel que $y(t^*)$ s'annule (ou bien de manière symétrique $x(t^*)$), alors par unicité des solutions, pour tout $t \geq 0$, $x(t^* + t) = x(t^*) \exp((t - t^*)\alpha)$ et $y(t^* + t) = 0$. Donc la solution reste positive.
En réalité, par unicité, en retournant le temps, ou sur un intervalle $]t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon[$, on montre qu'une solution qui toucherait un axe aurait forcément démarré sur un axe, donc l'instant t^* n'existe pas, sauf si la solution démarre sur un des axes.

16. Toujours dans le quadrant $Q = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0, b \geq 0\}$, trouver les points stationnaires, c'est-à-dire les points $(x^*, y^*) \in Q$ tels que les solutions $(x(t), y(t))$ de données initiales (x^*, y^*) restent constantes.
Il faut résoudre $\alpha x^* = \beta x^* y^*$ et $\gamma y^* = \delta x^* y^*$. On trouve le point $(0, 0)$, et le point $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$.

17. Calculer la différentielle de l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha x - \beta x y \\ -\gamma y + \delta x y \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$DF : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix} \end{array}$$

18. Calculer les valeurs propres de la matrice représentant la différentielle aux points stationnaires trouvés à la question 16.

Au point $(0,0)$, la matrice est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$ donc les valeurs propres sont α et $-\gamma$. Au point $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$, la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -\beta\gamma/\delta \\ \delta\alpha/\beta & 0 \end{pmatrix}$ donc les valeurs propres sont $\pm i\sqrt{\alpha\gamma}$.

19. On pose V la fonction, définie sur $\mathring{Q} := (\mathbb{R}_+^*)^2$, telle que

$$V : \begin{array}{ccc} \mathring{Q} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y). \end{array}$$

Montrer que la fonction V est constante le long des trajectoires qui sont solutions du système différentiel de Lotka-Volterra avec des données initiales $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

Puisque les solutions ne s'annulent pas (avec la question 15, au moins localement, mais en fait globalement), elles restent dans l'intérieur de Q. On peut dériver $V(x(t), y(t))$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t),y(t))}{dt} &= x'(t)\partial_x V(x(t),y(t)) + y'(t)\partial_y V(x(t),y(t)) \\ &= (\alpha x - \beta xy)(\delta - \gamma/x) + (-\gamma y + \delta xy)(\beta - \alpha/y) \\ &= \alpha\delta x - \beta\delta xy - \alpha\gamma + \beta\gamma y - \beta\gamma y + \beta\delta xy + \alpha\gamma - \alpha\delta x = 0. \end{aligned}$$

20. Soit $(x_0, y_0) \in \mathring{Q}$ tel que $\beta y_0 \neq \alpha$. Montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in \mathcal{U}$, et un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathring{Q}$ tel que $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, tels que l'ensemble

$$V_0 := \{(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : V(a,b) = V(x_0,y_0)\}$$

vérifie

$$\Big[(a,b) \in \mathcal{O} \text{ et } (a,b) \in V_0\Big] \Leftrightarrow \Big[a \in \mathcal{U} \text{ et } b = \phi(a)\Big].$$

La fonction $W(\cdot,\cdot) := V(\cdot,\cdot) - V(x_0,y_0)$ est dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{Q}$ qui est un ouvert. Le point (x_0, y_0) est un zéro de W. La dérivée partielle de W par rapport à la deuxième variable est $\beta - \alpha/y$ qui ne s'annule donc pas au point (x_0, y_0). Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction ϕ définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ contenant le point x_0, et un voisinage $\mathcal{O} \subset \mathring{Q}$ de (x_0, y_0) tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\Big[(x,y) \in \mathcal{O} \text{ et } W(x,y) = 0\Big] \Leftrightarrow \Big[x \in \mathcal{U} \text{ et } y = \phi(x)\Big].$$

21. Calculer la différentielle de ϕ au point x_0.

On différencie la constante $V(x, \phi(x))$. Ainsi $\partial_x V(x_0,y_0) + \dfrac{d\phi}{dx}(x_0)\partial_y V(x_0,y_0) = 0$ donc

$$\frac{d\phi}{dx}(x_0) = -\frac{\delta - \gamma/x_0}{\beta - \alpha/y_0} = \frac{y_0}{x_0}\frac{\delta x_0 - \gamma}{\alpha - \beta y_0}.$$

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des idéaux d'anneaux tels que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ et $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. La première partie détaille la structure d'anneau de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. La deuxième partie s'intéresse à certains idéaux particuliers de $\mathbb{Z}$. La troisième partie s'intéresse aux idéaux de $\mathbb{K}[X]$ et le lien avec les endomorphismes.

On rappelle qu'un nombre $p \in \mathbb{N}$ est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ qui sont donc nécessairement 1 et p. Les nombres 0, 1, 4 et 6 ne sont donc pas des nombres premiers, alors que 2, 3 et 5 le sont. L'ensemble $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est défini par

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \left\{a + b\, i\sqrt{5} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X construit sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{K}[X] = \left\{\sum_{k=0}^{p} z_k X^k : p \in \mathbb{N}, (z_k)_{0\leq k\leq p} \in \mathbb{K}^{p+1}\right\}$$

et pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_p[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à p.

Soit un entier naturel $d \in \mathbb{N}$, on note $End(\mathbb{K}^d)$ l'ensemble des endomorphismes sur $\mathbb{K}^d$. Pour un entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on note f^p l'application $f \circ \cdots \circ f$ composée p fois avec la convention $f^0 = Id_{\mathbb{K}^d}$. Et pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $P(f)$ l'application $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} z_k f^k$.

Partie I

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ possède une structure naturelle d'anneau pour les lois usuelles.
   $\mathbb{Z}$ étant un anneau, la structure additive de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est évidente. Pour le produit, il suffit de remarquer que $(a + bi\sqrt{5})(c + di\sqrt{5}) = (ac - 5bd) + (bc + ad)i\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
2. Montrer qu'on peut représenter un élément $x \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ par un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] & \to & \mathbb{Z}^2 \\ x & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

   est un morphisme d'anneau de $(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}], +, \times)$ dans $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \otimes)$. On précisera les lois $\oplus$ et $\otimes$ s'il y a lieu.
   ϕ est le morphisme naturel d'écriture de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. Attention la loi $\oplus$ dans $\mathbb{Z}^2$ est la loi naturelle. Mais la loi $\otimes$ est celle héritée de celle des complexes $(a, b) \otimes (c, d) = (ac - 5bd, bc + ad)$.
3. Montrer que ϕ est un isomorphisme d'anneaux.
   Il est clairement injectif et surjectif sans plus de détails.
4. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas un corps.
   L'élément 2 n'est pas inversible.

5. Montrer qu'il existe une matrice carrée M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}])$ (on précisera les valeurs des 4 coefficients $M_{1,1}$, $M_{1,2}$, $M_{2,1}$ et $M_{2,2}$) telle que pour tous $(x,y) \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]^2$

$$x \times y = \phi(x) M \phi(y)^T,$$

où les opérations de multiplications du membre de droite sont les opérations naturelles de multiplication matrice/vecteur.

$M = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{5} \\ i\sqrt{5} & -5 \end{pmatrix}.$

6. Grâce à la matrice M, on construit l'application suivante :

$$\Psi : \begin{array}{ccl} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, y_1, y_2) & \mapsto & M_{1,1}x_1y_1 + M_{1,2}x_2y_1 + M_{2,1}x_1y_2 + M_{2,2}x_2y_2. \end{array}$$

Montrer que cette application est une forme bilinéaire.

Premièrement on remarque que Ψ est symétrique, car $M_{1,2} = M_{2,1}$. Cela permet de ne vérifier la linéarité que par rapport à la première variable. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x,y,z) \in (\mathbb{K}^2)^3$ alors

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda x + y, z) &= M_{1,1}(\lambda x + y)_1 z_1 + M_{1,2}(\lambda x + y)_2 z_1 + M_{2,1}(\lambda x + y)_1 z_2 + M_{2,2}(\lambda x + y)_2 z_2 \\ &= \lambda M_{1,1}x_1z_1 + \lambda M_{1,2}x_2z_1 + \lambda M_{2,1}x_1z_2 + \lambda M_{2,2}x_2z_2 \\ &\quad + M_{1,1}y_1z_1 + M_{1,2}y_2z_1 + M_{2,1}y_1z_2 + M_{2,2}y_2z_2 \\ &= \lambda\Psi(x,z) + \Psi(y,z). \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $\Psi(x,y) = yMx^T = xMy^T$ avec les notations usuelles, et que cette application est clairement bilinéaire.

7. Montrer qu'il existe une forme quadratique $q : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{C}$ telle que pour tous $(x,y) \in (\mathbb{K}^2)^2$

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right).$$

On pose $q : x \mapsto \Psi(x,x)$ alors $q(x+y) - q(x-y) = \Psi(x+y, x+y) - \Psi(x-y, x-y)$ d'où $q(x+y) - q(x-y) = \Psi(x,x) + 2\Psi(x,y) + \Psi(y,y) - \Psi(x,x) + 2\Psi(x,y) - \Psi(y,y) = 4\Psi(x,y)$.

8. Montrer que, par analogie avec la construction de Ψ et q sur $\mathbb{K}^2$, on peut définir une application $\overline{\Psi} : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ et une application $\overline{q} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ telles que pour tous $(x,y) \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]^2$

$$\overline{q}(\phi(x+y)) - \overline{q}(\phi(x-y)) = \phi(2x)M\phi(2y)^T = (2x) \times (2y) = 4\overline{\Psi}(\phi(x), \phi(y)).$$

On pose $\overline{\Psi}((a,b),(c,d)) = (a,b) \otimes (c,d) = (a,b)M(c,d)^T$ et $\overline{q} : (a,b) \to (a,b)M(a,b)^T = a^2 + 2abi\sqrt{5} - 5b^2$. Alors pour tous $x = a + bi\sqrt{5}$ et $y = c + di\sqrt{5}$, on a

$$\begin{aligned} (2x) \times (2y) &= \phi(2x)M\phi(2y)^T = (2a, 2b)M(2c, 2d) = 4ac + 4adi\sqrt{5} + 4bci\sqrt{5} - 20bd \\ &= 4(a,b)M(c,d)^T = 4\overline{\Psi}(\phi(x), \phi(y)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{q}(\phi(x+y)) - \overline{q}(\phi(x-y)) &= (a+c)^2 + 2(a+c)(b+d)i\sqrt{5} - 5(b+d)^2 \\ &- (a-c)^2 - 2(a-c)(b-d)i\sqrt{5} + 5(b-d)^2 \\ &= 4ac + 4adi\sqrt{5} + 4bci\sqrt{5} - 20bd. \end{aligned}$$

Partie II

Pour un anneau quelconque $(\mathbb{A}, +, \times)$, on définit pour tout $a \in \mathbb{A}$ l'ensemble

$$a\mathbb{A} = \{c \in \mathbb{A} : \exists\, b \in \mathbb{A} \text{ tel que } c = a \times b\}.$$

Pour $c \in \mathbb{A}$, on dira qu'un ensemble $c\mathbb{A}$ est indécomposable :
— s'il est différent des deux ensembles triviaux $\{0_{\mathbb{A}}\}$ et $\mathbb{A}$,
— s'il vérifie la propriété (P) suivante :

$$\text{Pour tout } a, b \in \mathbb{A}, \text{ si } a \times b \in c\mathbb{A}, \text{ alors } a \in c\mathbb{A} \text{ ou } b \in c\mathbb{A}. \tag{P}$$

10. Montrer que pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
Soit $p \in \mathbb{Z}$, et $q \in n\mathbb{Z}$ alors il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $q = nr$, donc $pq = pnr \in n\mathbb{Z}$.
11. Montrer que pour deux idéaux I et J de $\mathbb{A}$, alors l'ensemble suivant est un idéal de $\mathbb{A}$:

$$I \cap J := \{a \in \mathbb{A} : a \in I \text{ et } a \in J\}.$$

Soit $b \in I \cap J$, et soit $a \in \mathbb{A}$, alors $b \times a$ est dans I car I est un idéal, et $b \times a$ est dans J car J est un idéal. Donc $b \times a$ est dans $I \cap J$ qui vérifie donc la propriété d'être un idéal.
12. Montrer que pour tout nombre premier $p \in \mathbb{N}$, l'idéal $p\mathbb{Z}$ est indécomposable.
Soit $p \in \mathbb{N}$ premier. Comme p est différent de 0 et 1, alors $p\mathbb{Z}$ n'est pas un ensemble trivial. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $ab \in p\mathbb{Z}$ alors p divise ab. Si p divise a, c'est fini. Si p ne divise pas a, alors p est premier avec a. Par le théorème de Gauss, alors p divise b.
13. Montrer que $6\mathbb{Z}$ ne vérifie pas la propriété (P), c'est-à-dire qu'il est "décomposable".
$6 = 2 \times 3$. Donc $2 \times 3 \in 6\mathbb{Z}$ mais $2 \notin 6\mathbb{Z}$ et $3 \notin 6\mathbb{Z}$.
14. Trouver deux idéaux I et J indécomposables tels que

$$I \cap J = 6\mathbb{Z}.$$

$2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ vérifient la propriété (P). Si $n \in I \cap J$, alors 2 divise n et 3 divise n alors il existe p et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 2p = 3q$. Comme 2 est premier avec 3, alors 2 divise q, donc il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3 \times 2 \times r = 6r$ donc $n \in 6\mathbb{Z}$. Réciproquement, si $n \in 6\mathbb{Z}$ alors n est divisible par 2 et par 3.
15. Montrer que pour tout idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une famille finie d'idéaux $p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_k\mathbb{Z}$ vérifiant tous la propriété (P) tels que

$$n\mathbb{Z} \subset \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$

Soit $n \neq -1, 0, 1$. Il existe une décomposition de n en nombres premiers tels que $n = \prod_{j=1}^{k} p_j$ avec potentiellement des répétitions. Posons $I = \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$. C'est bien un idéal par généralisation par récurrence de la question 11. Il contient n car pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, on a $n = p_j \times \prod_{i=1, i\neq j}^{k} \in p_j\mathbb{Z}$. Donc $n\mathbb{Z} \subset I$.

16. Montrer que l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie. C'est-à-dire qu'il existe un idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$ tel que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et toute famille finie d'idéaux indécomposables $p_1\mathbb{Z}, \dots, p_k\mathbb{Z}$ telle que

$$n\mathbb{Z} \subset \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$

il existe $m \in \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ tel que n ne divise pas m.

$4\mathbb{Z}$ est un contre-exemple. En effet si $4\mathbb{Z}$ est inclus dans $\bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ alors $4 \in \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$. Donc $4 \in p_j\mathbb{Z}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$. Mais les p_j sont des nombres premiers tels qu'il existe $q_j \in \mathbb{Z}$ avec $4 = p_j q_j$. Nécessairement $p_j \leq 4$, et $p_j \neq 3$ qui est premier avec 4. Donc $p_j = 2$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$. Donc $4\mathbb{Z} \subset \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \neq 4\mathbb{Z}$ car $2 \in 2\mathbb{Z}$ et $2 \notin 4\mathbb{Z}$.

La notion de décomposables n'étant pas compatibles avec l'intersection, on cherche une autre manière de décomposer un idéal. On va montrer que cette notion est liée à ce qu'on appelle les nombres premiers.

17. Montrer que pour deux idéaux I et J de $\mathbb{A}$, alors les deux ensembles suivants sont aussi des idéaux de $\mathbb{A}$:

— $IJ := \left\{c \in \mathbb{A} : \exists k \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_k \in I, b_1, \dots, b_k \in J \text{ tels que } c = \sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j\right\}$

— $I + J := \{c \in \mathbb{A} : \exists\, i \in I \text{ et } j \in J \text{ tels que } c = i + j\}$.

Soit $c \in IJ$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_k \in I, b_1, \dots, b_k \in J$ tels que $c = \sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j$. Soit $d \in \mathbb{A}$, alors $c \times d = \left(\sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j\right) d = \sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j d$ est la somme de produits d'éléments de I et de J (en effet $b_j \times d \in J$ puisque J est un idéal) donc $c \times d$ est dans IJ qui vérifie donc la propriété d'être un idéal.
Soit $b \in I + J$, alors il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que $b = i + j$. Soit $a \in \mathbb{A}$, $b \times a = i \times a + j \times a$ par distributivité, le premier terme est dans I car I est un idéal, et le deuxième terme est dans J car J est un idéal. Donc $b \times a$ est dans $I + J$ qui vérifie donc la propriété d'être un idéal.

18. Trouver deux idéaux I et J de $\mathbb{Z}$ indécomposables tels que

$$IJ = 6\mathbb{Z}.$$

On dit qu'on a trouvé une décomposition de l'idéal $6\mathbb{Z}$ en deux idéaux indécomposables.
$2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ vérifient la propriété (P). Si $n \in IJ$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_k \in 2\mathbb{Z}, b_1, \dots, b_k \in$

$3\mathbb{Z}$ tels que $n = \sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j$. Par le théorème de Gauss, puisque 2 et 3 sont premiers entre-eux, 2 divise $a_j \times b_j$ et 3 divise $a_j \times b_j$ donc 6 divise chaque $a_j \times b_j$ donc il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 6r$ donc $n \in 6\mathbb{Z}$. Réciproquement, si $n \in 6\mathbb{Z}$ alors n est divisible par 2 et par 3.

19. Montrer que pour tout idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une famille finie d'idéaux indécomposables $p_1\mathbb{Z}, \dots, p_k\mathbb{Z}$ tels que

$$n\mathbb{Z} = \prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$

On va montrer la propriété par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ en ne considérant que les cas $n > 0$, car les cas $n < 0$ sont symétriques. Le cas $n = 2$ est vérifié, car $2\mathbb{Z}$ est indécomposable, et donc il existe $k = 1$ et $p_1 = 2$ tel que $2\mathbb{Z} = p_1\mathbb{Z}$ qui est indécomposable. Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n - 1 \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3$. Montrons-la au rang n. Soit $n \geq 3$. Si c'est un nombre premier alors on pose $k = 1$ et $p_1 = n$ et on a $n\mathbb{Z} = p_1\mathbb{Z}$ qui est en effet indécomposable. Sinon n n'est pas un nombre premier, alors il possède au moins un diviseur $u \in \mathbb{N}^*$ qui n'est ni 1 ni n. On pose $v \in \mathbb{N}^*$ tel que $v = n/u$. Alors v n'est pas égal à 1 sinon $u = n$ ce qui est contradictoire. Le nombre v n'est pas non plus égal à n sinon $u = 1$ ce qui est contradictoire. Ainsi le nombre n possède un autre diviseur $v \in \mathbb{N}^*$ qui n'est ni 1 ni n. Les deux nombres u et v appartiennent donc à l'ensemble des nombres $\{2, \dots, n-1\}$ pour lesquels la propriété est vérifiée. Ainsi il existe $k^u \in \mathbb{N}^*$ et $k^v \in \mathbb{N}^*$ ainsi que deux familles d'idéaux indécomposables $p_1^u, \dots, p_{k^u}^u$ et $p_1^v, \dots, p_{k^v}^v$ tels que

$$u\mathbb{Z} = \prod_{j=1}^{k^u} p_j^u\mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad v\mathbb{Z} = \prod_{j=1}^{k^v} p_j^v\mathbb{Z}.$$

On pose donc $k = k^u + k^v$ et $(p_1, \dots, p_k) = (p_1^u, \dots, p_{k^u}^u, p_1^v, \dots, p_{k^v}^v)$. Ainsi

$$n\mathbb{Z} = uv\mathbb{Z} = \prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z} = \prod_{j=1}^{k^u} p_j^u\mathbb{Z} \prod_{j=1}^{k^v} p_j^v\mathbb{Z}.$$

On a donc montré la propriété au rang n ce qui conclue la démonstration par récurrence.

20. Trouver deux idéaux I et J de $\mathbb{Z}$ indécomposables tels que

$$I + J = \mathbb{Z}.$$

$2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ vérifient la propriété (P). Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, il existe u et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $2u + 3v = 1$. Donc $I + J$ contient 1 et c'est un idéal, donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $n = 1 \times n \in I + J$, donc $\mathbb{Z} \subset I + J$ d'où l'égalité.

Partie III

21. Soit $P(x) \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X)\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
C'est la même question que la question 10.

22. Montrer que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ s'écrivent sous la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$.
Soit un idéal I. Si cet idéal contient une constante non nulle, alors il contient tout $\mathbb{K}[X]$ et il est donc égal à $1_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[X]$. S'il est réduit à $\{0_{\mathbb{K}}\}$, alors il s'écrit $0_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[X]$. Sinon on peut trouver un polynôme de degré minimal, disons de degré $p \in \mathbb{N}$. Notons ce polynôme P. Si $Q \neq 0$ est un autre polynôme de $\mathbb{K}[X]$ (donc non constant et de degré supérieur ou égal à p), alors on peut faire la division de P par Q.
$$R = P - QD.$$
Le polynôme R serait donc de degré strictement inférieur à p, donc c'est forcément une constante, et elle ne peut être que nulle. Comme P et Q sont de même degré, alors le polynôme D est aussi une constante non nulle. Ainsi $Q = PD^{-1}$ et donc $Q \in P(X)\mathbb{K}[X]$.

23. Caractériser les idéaux de la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$ qui sont indécomposables pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Ce sont les polynômes qui sont irréductibles, donc de degré 2 à discriminant négatif ou de degré 1. Attention, il n'y a pas les constantes, car dans ce cas $P(X)\mathbb{K}[X]$ est $\mathbb{K}[X]$ ou $\{0_{\mathbb{K}}\}$ si la constante est nulle.

24. Caractériser les idéaux de la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$ qui sont indécomposables pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Ce sont les polynômes qui sont irréductibles, donc de degré 1. Attention, il n'y a pas les constantes, car dans ce cas $P(X)\mathbb{K}[X]$ est $\mathbb{K}[X]$ ou $\{0_{\mathbb{K}}\}$ si la constante est nulle.

25. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^d$. Montrer que l'ensemble des polynômes qui annulent l'endomorphisme f, c'est-à-dire
$$Annul(f) := \{P(X) \in \mathbb{K}[X] : P(f) \text{ est l'endomorphisme identiquement nul}\},$$
est un idéal dans $\mathbb{K}[X]$.
Soient $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $R(X) \in Annul(f)$, alors $QR(X) := Q(X)R(X)$ est un polynôme tel que $QR(f) = Q(f)R(f) = Q(f) \times 0 = 0$ donc $QR \in Annul(f)$ qui est donc un idéal.

26. On pose $\Phi_f : \mathbb{K}[X] \to End(\mathbb{K}^d)$ l'application qui a un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ associe l'endomorphisme $P(f) \in End(\mathbb{K}^d)$. Montrer que Φ_f est un morphisme d'anneaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ vers $(End(\mathbb{K}^d), +, \circ)$.
L'application Φ_f est compatible avec la loi $+$ car pour tous polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ avec des notations évidentes
$$\Phi_f(Q) + \Phi_f(R) = \sum_{k=0}^{q} z_{q,k} f^k + \sum_{k=0}^{r} z_{r,k} f^k = \sum_{k=0}^{\max(q,r)} (z_{q,k} + z_{r,k}) f^k = \Phi_f(Q+R)$$
en ayant complété les sommes par des coefficients nuls si besoin.
Pour étudier la compatibilité avec la loi $\times$, on peut se ramener à étudier simplement la stabilité des monômes grâce à la propriété précédente de compatibilité pour la somme. Soit $Q(X) = z_Q X^q$ et $R(X) = z_R X^r$ pour $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ et $(z_Q, z_R) \in \mathbb{K}^2$. Alors pour tout $x \in \mathbb{K}^d$
$$\begin{aligned}(\Phi_f(Q) \circ \Phi_f(R))(x) &= (z_Q f^q \circ z_R f^r)(x) = z_Q f^q(z_R f^r(x)) \\ &= z_Q z_R f^q(f^r(x)) = z_Q z_R f^{q+r}(x) = \Phi_f(Q \times R)(x),\end{aligned}$$
d'où l'égalité entre $\Phi_f(Q) \circ \Phi_f(R)$ et $\Phi_f(Q \times R)$. Enfin $\Phi_f(1_{\mathbb{K}[X]}) = \Phi_f(1_{\mathbb{K}} X^0) = 1_{\mathbb{K}} Id_{\mathbb{K}^d} = 1_{End(\mathbb{K}^d)}$.

27. Montrer que pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ le noyau de $\Phi_f(P)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^d$ stable par l'endomorphisme f.
Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, alors $Ker(\Phi_f(P)) = \{x \in \mathbb{K}^d : P(f)(x) = 0_{\mathbb{K}^d}\}$. Soit deux éléments x et y dans $Ker(\Phi_f(P))$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $P(f)(\lambda x + y) = \lambda P(f)(x) + P(f)(y) = 0_{\mathbb{K}^d}$. Cela forme donc bien un sous-espace vectoriel. Montrons qu'il est stable par f. Soit $x \in Ker(\Phi_f(P))$, alors $P(f)(f(x)) = f(P(f)(x))$ car f et $P(f)$ commutent donc $P(f)(f(x)) = 0_{\mathbb{K}^d}$ et $f(x) \in Ker(\Phi_f(P))$.

28. On appelle polynôme minimal d'un endomorphisme f le polynôme de $Annul(f)$ de plus petit degré $p \in \mathbb{N}$, dont le coefficient de plus haut degré $z_p = 1$. Montrer qu'un tel polynôme minimal existe, et qu'il est de plus unique.
C'est la question 14 pour l'existence d'un polynôme non nul $P(X)$ de degré minimal $p \in \mathbb{N}$ tel que $Annul(f) = P(X)\mathbb{K}[X]$. On pose alors $\tilde{P}(X)$ le polynôme colinéaire à $P(X)$ dont le coefficient de plus haut degré $\tilde{z}_p = 1_{\mathbb{K}}$ en posant $\tilde{z}_k = z_k/z_p$ pour tout $k = 0, \dots, p$ (le coefficient z_p est non nul donc inversible par définition du degré du polynôme $P(X)$). Soit $Q(X)$ un tel autre polynôme, alors $P - Q$ est un polynôme de degré inférieur strictement à p (car $P(X)$ et $Q(X)$ ont même coefficient de plus haut degré), donc c'est nécessairement la constante $0_{\mathbb{K}}$, et donc $P = Q$.

29. Soit M_f la matrice représentant un endomorphisme $f \in End(\mathbb{K}^d)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de polynôme minimal $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $p \in \mathbb{N}$. On admet que M_f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal $P(X)$ est scindé à racines simples. Dans ce cas, il existe des polynômes $(P_k(X))_{1 \leq k \leq p}$, non réduits à des constantes et de degré 1, tels que $P(X) = \prod_{k=1}^{p} P_k(X)$. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq p$, les idéaux $I_k := P_k(X)\mathbb{K}[X]$ sont indécomposables, que pour tout $Q \in I_k$
$$Ker(\Phi_f(P_k)) \subset Ker(\Phi_f(Q))$$
et que
$$Ker(\Phi_f(P_k)) \bigoplus Ker(\Phi_f(P_m))$$
pour tout $1 \leq m \leq p$ avec $m \neq k$.
Ils sont indécomposables, car de degré 1 (voir les questions 23 et 24). Si $Q \in I_k$ alors, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = RP_k$ et pour tout $x \in Ker(\Phi_f(P_k))$, on a $P_k(f)(x) = 0_{\mathbb{K}^d}$ donc $Q(f)(x) = R(f)(P_k(f)(x)) = R(f)(0_{\mathbb{K}^d}) = 0_{\mathbb{K}^d}$ et $x \in Ker(\Phi_f(Q))$. Enfin pour tout $1 \leq m \leq p$ avec $m \neq p$, les espaces sont en somme directe si et seulement s'ils sont d'intersection triviale. Soit un élément x dans cette intersection, alors $P_k(f)(x) = 0_{\mathbb{K}^d} = P_m(f)(x)$, d'où $z_{k,1}f(x) + z_{k,0}x = z_{m,1}f(x) + z_{m,0}x$ donc $f(x) = -\dfrac{z_{k,0}}{z_{k,1}}x = -\dfrac{z_{m,0}}{z_{m,1}}x$ (les coefficients de plus hauts degrés sont inversibles). S'il existe une seule composante de x non nulle alors $z_{k,0} = z_{k,1}z_{m,0}z_{m,1}^{-1}$ donc $P_k(X) = z_{k,1}X + z_{k,0} = z_{k,1}X + z_{m,0}z_{m,1}^{-1}z_{k,1} = z_{k,1}z_{m,1}^{-1}(z_{m,1}X + z_{m,0}) = z_{k,1}z_{m,1}^{-1}P_m(X)$, et le polynôme P possède alors au moins une racine double, ce qui est contradictoire. Il existe de multiples autres démonstrations, notamment en utilisant le théorème de Bézout. En effet, il existe des polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que $1_{\mathbb{K}^d} = P_k(X)A(X) + P_m(X)B(X)$, et ainsi $Id_{\mathbb{K}^d} = \Phi_f(P_kA + P_mB)$ ce qui conduit à $x = A(f)(P_k(f)(x)) + B(f)(P_m(f)(x)) = 0_{\mathbb{K}^d}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

Soit la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de A (noté $Ker\,A$) et de l'image de A (notée $\operatorname{Im} A$).

On a : $Ker\,A = \{(x, y, -x+2y, -x+y)\}$ et le noyau est engendré par $e_3 = (1,0,-1,-1)$ et $e_4 = (0,1,2,1)$

On a : $\operatorname{Im} A = \{(X,Y,Z,T) / Y = -T; X+Y = -Z\}$ et l'image est engendrée par $e_1 = (-1,0,1,0)$ et $e_2 = (-1,1,0,-1)$

2. Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme associé à A ?

On vérifie que $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$. Dans la base de ces vecteurs, la matrice A est semblable à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc d'une projection (non orthogonale) sur l'image de A parallèlement au noyau.

3. Calculer A^n, pour tout $n \in N$.

Comme A est la matrice d'une projection, on a : $A^n = A$ pour n>0.

4. Soit la matrice B définie par : $B = 2A - I$, où I désigne la matrice unité d'ordre 4.
- Calculer B^n, pour tout $n \in N$.
- Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme associé à B ?

Soit P la matrice de passage telle que : $D = P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP = 2P^{-1}AP - I = 2D - I = \Delta$,

où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice semblable à B. Par conséquent, il s'agit d'une matrice de symétrie par rapport au plan défini par l'image de A, parallèlement à son noyau.

On a : $\Delta^n = \begin{cases} \Delta \text{ si } n \text{ impair} \\ I \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$ et $B^n = \begin{cases} P\Delta P^{-1} \text{ si } n \text{ impair} \\ I \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Mais plus simplement (pour éviter de calculer l'inverse de P), comme il s'agit d'une symétrie ou par la formule du binôme $B^n = \begin{cases} B \text{ si } n \text{ impair} \\ I \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$

Exercice n° 2

Soient u et v deux endomorphismes de R^n de matrices respectives A et B dans la base canonique de R^n. On considère l'endomorphisme w de R^{2n} dont la matrice dans la base canonique de R^{2n} s'écrit par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

1. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix}$, où I désigne la matrice unité d'ordre n.

- Exprimer le déterminant $\det w$ en fonction de $\det(u+v)$ et $\det(u-v)$.
- Donner une relation de même type pour le polynôme caractéristique de w.

On a : $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B+A \\ B-A & A \end{pmatrix}$,

d'où $\det I \times \det \begin{pmatrix} A-B+B & B \\ B-A+A & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det(B-A)\det(B+A)$, car le déterminant étant inchangé si on ajoute une colonne, on a :

$\det \begin{pmatrix} A-B+B & B \\ B-A+A & A \end{pmatrix} = (-1)^n (-1)^n \det(B-A)\det(B+A)$

et $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det w = \det(u-v)\det(u+v)$.

De la même façon : $\det(w - \lambda I) = \det(u - v - \lambda I)\det(u + v - \lambda I)$

2. On suppose que u et v sont diagonalisables dans R^n et que de plus $u o v = v o u$. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à u et v.

Soient $(e_1,...,e_n)$ une base de vecteurs propres de u pour les valeurs propres λ et $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ une base de vecteurs propres de v pour les valeurs propres μ.

$\forall\, k=1,...,n \quad e_k=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,\varepsilon_{k\,j}$, où $\varepsilon_{k\,j}$ correspond à la jème composante de e_k dans la base $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$. Il s'ensuit que : $\lambda_k\, e_k=\sum_j \lambda_k\gamma_j\,\varepsilon_{k\,j}$ et $u(e_k)=\sum_j \gamma_j\, u(\varepsilon_{k\,j})$.

La décomposition dans une base étant unique, on obtient $u(\varepsilon_{k\,j})=\lambda_k\,\varepsilon_{k\,j}$ et $\varepsilon_{k\,j}$ appartient à l'intersection des deux sous espaces vectoriels propres, c'est donc une base de vecteurs propres communes.

3. On suppose toujours que u et v sont diagonalisables dans R^n tels que $u o v = v o u$.
- Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonalisables.
- Montrer que w est diagonalisable.

Soit P la matrice des vecteurs propres communs à A et B, alors $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonalisables. On a : $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^{-1}AP & P^{-1}BP \\ P^{-1}BP & P^{-1}AP\end{pmatrix}$.

Soit $Q=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I\end{pmatrix}$, alors $Q^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}Q$ est une matrice diagonale. L'endomorphisme w est donc diagonalisable.

4. Soit $M=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -5\end{pmatrix}$.
- Diagonaliser M.
- On pose $A=I+M$ et $B=M^4$. La matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

On trouve : $\det(M-\lambda I)=-4\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ et on a donc trois valeurs propres 0, 1 et - 2.

La matrice M est semblable à la matrice diagonale $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $M=P\,DP^{-1}$, d'où $B=M^4=P\,D^4\,P^{-1}$ est diagonalisable. De même $A=M+I=P\,(D+I)P^{-1}$ est diagonalisable et de plus $AB=BA$, donc d'après la question précédente la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice n° 3

Soit l'équation générale du troisième degré de la forme :

$$(1)\quad u^3+au^2+bu+c=0$$

où a, b, c sont des paramètres réels.

1. En posant u=x+h, déterminer la valeur de h pour que l'équation (1) soit équivalente à l'équation suivante (on explicitera p et q):

$$(2)\ x^3 + px + q = 0.$$

On remplace u dans l'équation (1) et on annule le terme en x^2, soit $3h + a = 0$ pour obtenir $h = -a/3$ que l'on remplace dans l'équation pour obtenir :

$x^3 + x(3h^2 + ah + b) + ah^2 + bh + c = 0$.

On pose donc $p = 3h^2 + 2ah + b = b - a^2/3$ et $q = \dfrac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$ pour obtenir l'équation (2).

2. On cherche à résoudre l'équation (2) en posant : $x = y + z$ et $3yz + p = 0$ (y et z sont deux autres inconnues). Trouver une équation équivalente à (2) en fonction de y et z.

Dans l'équation (2), on remplace x par y+z et on obtient :

$$(3)\ y^3 + z^3 + q = 0$$

3. Montrer que y^3 et z^3 sont des solutions d'une équation du second degré que l'on précisera.

On a donc le système $\begin{cases} 3yz + p = 0 \\ y^3 + z^3 + q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 z^3 = -p^3/27 \\ y^3 + z^3 = -q \end{cases}$

D'où l'équation du second degré (en utilisant la somme et le produit):

$$(4)\ X^2 + qX - p^3/27 = 0$$

4. Résoudre dans C (ensemble des nombres complexes), l'équation :

$8u^3 - 12u^2 - 18u + 19 = 0$

Pour résoudre cette équation, on applique la technique précédente.

Pour h=1/2, on a :

$$(2)\ x^3 - 3x + 1 = 0$$

Puis pour $x = y + z$ et $yz = 1$, on obtient

$$(3)\ y^3 + z^3 + 1 = 0$$

D'où l'équation du second degré :

$$(4)\ X^2 + X + 1 = 0$$

$j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et son conjugué sont les racines de cette équation. Par conséquent y et z sont les racines cubiques de ces valeurs complexes, puis $u = y + z + 1/2$.

Exercice n° 4

On note E l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle trois fois dérivables et $F = \left\{ f \in E / f(x) = f^{(3)}(x) - 3f^{(2)}(x) + 3f'(x) \ \ \forall x \in R \right\}$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in F$ à partir de la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

Il faut bien sûr que f soit trois fois dérivables. Soit $f(x)=e^x g(x)$, puis on calcule les dérivées de f jusqu'à l'ordre 3, à savoir : $f^{'}(x)=e^x\,(g(x)+g^{'}(x))$;

$f^{(2)}(x)=e^x\,(g(x)+2g^{'}(x)+g^{(2)}(x))$; $f^{(3)}(x)=e^x\,(g(x)+3g^{'}(x)+3g^{(2)}(x)+g^{(3)}(x))$ et on remplace dans l'équation de F pour obtenir : $e^x g(x)=e^x\,(g(x)+g^{(3)}(x))$. La condition est donc $g^{(3)}(x)=0$.

2. Vérifier que F est un sous espace vectoriel de E et trouver une base de F.

F est bien un sous espace vectoriel car l'équation est une combinaison linéaire de dérivées. Par rapport à la question précédente, trouvons une base pour les fonctions g qui vérifient $g^{(3)}(x)=0$

Il s'agit donc des polynômes du second degré dont une base est formée par la base canonique $(1,x,x^2)$. Par conséquent F est de dimension 3 et engendré par (e^x,xe^x,x^2e^x)

3. Montrer que si $f\in F$, alors $f^{'}\in F$.

Cette question est évidente.

4. Soit $D:F\to F$ définie par : $D(f)=f^{'}$.

- Expliciter la matrice de D dans la base trouvée à la question 2,

- Déterminer l'inverse de D si cette matrice existe,

- Calculer $D^n\ \ \forall n\in N^*$.

Pour la matrice de D, on a $D(e^x)=e^x;D(xe^x)=e^x(1+x);D(x^2e^x)=e^x(x^2+2x)$ et la matrice est : $D=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. Comme son déterminant est égal à 1, elle est inversible et $D^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$. La matrice s'écrit : $D=I+N$ avec $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, d'où $N^3=0$. D'après la formule du binôme, on obtient :

$$D^n=(I+N)^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice n° 5

On considère la fonction $f:\ R^2 \to R^2$ définie par :

$f(x,y) = \dfrac{x^n}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$, où n est un entier naturel non nul.

1. Etudier la continuité de *f*.

La fonction est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine, donc la question se pose uniquement en (0,0).

Pour étudier cette continuité, on utilise les coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta$. Par conséquent : $\underset{(0,0)}{Lim}\, f(x,y) = \underset{r\to 0}{Lim}\dfrac{r^n\cos^n\theta}{r^2} = \underset{r\to 0}{Lim}\, r^{n-2}\cos^n\theta$ et cette limite est nulle si et seulement si *n*>2. La fonction est donc continue à l'origine pour *n*>2.

2. Etudier la différentiabilité de *f* en (0, 0).

Il faut d'abord regarder l'existence des dérivées partielles pour *n*>2;

$$f_x^{'}(0,0) = \underset{x\to 0}{Lim}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \underset{x\to 0}{Lim}\ x^{n-3} = \begin{cases} 1\ si\ n=3 \\ 0\ si\ n>3 \end{cases}$$

$$f_y^{'}(0,0) = \underset{y\to 0}{Lim}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

- Si *n*>3, la différentielle, si elle existe, est nulle.

On a : $\underset{(0,0)}{Lim}\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \underset{(0,0)}{Lim}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underset{r\to 0}{Lim}\ r^{n-3}\cos^n\theta = 0$ (Dans R^2, toutes les normes sont équivalentes), donc *f* est différentiable.

- Si *n*=3, on a : $\underset{(0,0)}{Lim}\dfrac{f(x,y)-x}{\|(x,y)\|} = \underset{(0,0)}{Lim}\dfrac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underset{r\to 0}{Lim}\ r^{n-3}(\cos^n\theta - \cos\theta)$ et cette limite n'existe pas, donc la fonction n'est pas différentiable.

3. Pour *x*>0 et *n*>3, on pose $I_x = \int_1^2 f(x,y)\,dy$. Expliciter I_x.

$$I_x=\int_1^2 f(x,y)\,dy=\int_1^2 \frac{x^n}{x^2+y^2}\,dy=x^{n-2}\int_1^2 \frac{1}{1+(y/x)^2}\,dy$$, on pose $t=y/x$ pour obtenir :

$$I_x=x^{n-1}\int_{1/x}^{2/x}\frac{1}{1+t^2}\,dt=x^{n-1}\left[Arctg\,t\right]_{1/x}^{2/x}=x^{n-1}(Arctg(2/x)-Arctg(1/x))$$

Exercice n° 6

On considère la fonction $f:\ R\to R$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}\,Arctg\,\sqrt{x} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\\ \dfrac{1+x}{2\sqrt{-x}}\,Ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| & \text{si } x<0, x\neq -1\\ 0 & \text{si } x=-1\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de *f*.

Les problèmes se posent en 0 et -1, ailleurs la fonction est continue comme composée de fonctions continues.

- En 0^+, $Arctg\,\sqrt{x}\approx\sqrt{x}$, d'où $\underset{0^+}{Lim}\,f(x)=1$

- En 0^-, $Ln\left|1+\sqrt{-x}\right|\approx\sqrt{-x}$ et $Ln\left|1+\sqrt{-x}\right|-Ln\left|1-\sqrt{-x}\right|\approx 2\sqrt{-x}$ d'où $\underset{0^-}{Lim}\,f(x)=1$, et *f* est continue en 0.

Pour la continuité en -1, on a :
$f(x)=\dfrac{1+x}{2\sqrt{-x}}Ln\left|1+\sqrt{-x}\right|-\dfrac{(1+\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}}\times(1-\sqrt{-x})\,Ln\left|1-\sqrt{-x}\right|$ et ces deux termes tendent vers 0, donc la fonction est continue.

2. La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ? en -1 ?

- En 0^+, $Arctg\,\sqrt{x}=\sqrt{x}-x\sqrt{x}/3+o(x^3)$ et $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{(1+x)(1-x/3+o(x))-1}{x}\to 2/3$.

- En 0^-, $Ln\left|1+\sqrt{-x}\right|-Ln\left|1-\sqrt{-x}\right|=2\sqrt{-x}+\dfrac{2}{3}(-x\sqrt{-x})+o(x\sqrt{-x})$ et $\dfrac{f(x)-1}{x}\to 2/3$ d'où *f* est dérivable en 0 avec $f^{'}(0)=2/3$

- En -1, on cherche la limite de $\frac{f(x)}{x+1}$. On a : $\frac{1}{2\sqrt{-x}}\left(Ln\left|1+\sqrt{-x}\right|-Ln\left|1-\sqrt{-x}\right|\right)\to +\infty$ et la fonction n'est pas dérivable en -1.

3. Montrer que pour $|x|<1$, *f(x)* est la somme d'une série entière. Soit $a_n x^n$ le terme général de cette série, préciser a_n en fonction de *n*.

Pour $|x|<1$, $Arctg\ x=\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $Arctg\sqrt{x}=\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^n\sqrt{x}}{2n+1}$

Pour 0<*x*<1, $f(x)=(1+x)\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}$

Pour -1<*x*<0, $Ln(1+x)=\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $Ln(1+\sqrt{-x})-Ln(1-\sqrt{-x})=2\sum_0^\infty \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1}$, par conséquent, on trouve la même expression que dans le cas précédent. En conclusion *f* admet bien un développement en série entière pour $|x|<1$.

$$f(x)=(1+x)\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}=\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}+\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1}=1+\sum_1^\infty (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^n$$

Ou encore $f(x)=1-2\sum_1^\infty (-1)^n \frac{x^n}{4n^2-1}$, soit $a_0=1$; $a_n=-2\times\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$