

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

*Le sujet se compose de 5 exercices indépendants que les candidats peuvent traiter dans l'ordre de leur choix.*

*La clarté et la précision de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Exercice 1**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout réel  $x$  positif ou nul, on pose

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1.$$

Ainsi, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f_1(x) = x - 1$ ,  $f_2(x) = x^2 + x - 1$ .

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution strictement positive notée  $u_n$ .
2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. En calculant  $f_n(x) + 2$  pour  $x \neq 1$ , montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \frac{1}{2}(1 + u_n^{n+1})$ .  
Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 2

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $n \geq 2$ , on pose  $I_n(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^n} dx$  pour  $A > 1$ .

1. On note  $f_n$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^{n-1}}$  et on note  $f'_n$  sa dérivée. Calculer  $f'_n(x)$ .
2. Calculer  $I_n(A)$  et montrer qu'elle admet une limite quand  $A$  tend vers  $+\infty$ .  
Montrer que cette limite, notée  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx$ , a pour valeur  $\frac{1}{(n-1)^2}$ .
3. Soit  $X$  la variable aléatoire dont la densité est la fonction  $\phi$  est définie par :  
 $\phi(x) = 0$  si  $x < 1$  et  $\phi(x) = k \frac{\ln(x)}{x^4}$  si  $x \geq 1$ , où  $k$  est un réel.
  - (a) Calculer  $k$ .
  - (b) Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

## Exercice 3

Dans cet exercice,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice relative à la base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est  $N$ . Cette matrice est constituée de « 1 » sur la première et la dernière colonne et sur la diagonale principale et de « 0 » partout ailleurs (d'où son nom).

$$\text{Ainsi, on a : } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image de  $f$  puis son noyau.
2. Déterminer le rang de  $N - I_n$  où  $I_n$  désigne la matrice unité d'ordre  $n$ .
3. Dédire de ce qui précède deux valeurs propres de  $f$  ainsi que des bases de leurs sous espaces propres associés.
4. Calculer l'image par  $f$  du vecteur  $u = (1, 2, 2, \dots, 2, 1)$ .
5. En déduire que  $N$  est diagonalisable. Déterminer une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $D = P^{-1}NP$ .
6. Écrire les matrices  $D, N, P$  dans le cas où  $n = 4$ .  
Calculer  $P^{-1}$  puis  $N^k$  où  $k$  est un entier naturel non nul.

## Exercice 4

Dans une population donnée, on note  $p$  la proportion d'individus atteints par un certain virus. Sa présence éventuelle n'est rendue visible par aucun symptôme ; pour savoir si un individu est atteint, il faut donc lui faire subir un test.

Ce test possède les caractéristiques suivantes : si l'individu est atteint, le test est positif dans 99% des cas et s'il est sain, le test est négatif dans 99% des cas.

1. Exprimer en fonction de  $p$  la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit atteint par ce virus sachant que son test est positif.
2. Évaluer cette probabilité pour  $p = \frac{2}{1000}$
3. Que pensez-vous du résultat ?

### **Exercice 5**

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On a disposé  $m$  boules numérotées de 1 à  $m$  dans une boîte et on invite  $n$  enfants à venir chacun à leur tour tirer une boule de la boîte et à la remettre en jeu après avoir noté son numéro. Le tirage de la boule est aléatoire.

Un enfant qui tire une boule numérotée  $i$  gagne  $i$  points.

Pour tout  $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale au nombre d'enfants qui choisissent la boule numérotée  $i$ , et soit  $T$  le total des points obtenus.

1. Donner la loi de  $X_i$ ; préciser son espérance et sa variance.
2. On pose  $Y = X_1 + X_2$ . Que représente  $Y$ ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.
3. Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes?
4. Exprimer  $T$  en fonction des  $X_i$ . Calculer l'espérance de  $T$ .
5. Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on désigne par  $N_k$  le numéro de la boule choisie par le  $k^{\text{ième}}$  enfant. Déterminer la loi de  $N_k$ , son espérance et sa variance.
6. Exprimer  $T$  en fonction des  $N_k$ . Calculer l'espérance et la variance de  $T$ .

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

Le travail divise-t-il les humains ?

**Sujet n° 2**

« Quand les femmes sont éduquées, leurs pays deviennent plus forts et plus prospères » indiquait Michelle OBAMA lors d'un voyage en Afrique en 2013. Développez cette citation.

**Sujet n° 3**

De nombreux États africains souhaitent développer le secteur du tourisme. Quels sont les avantages et les difficultés qu'implique cette démarche ?

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

**Sujet n°1 : Dissertation**

Quels sont les enjeux, pour les économies d'Afrique sub-saharienne, du réchauffement climatique ?

**Sujet n°2 : Exercices et questions**

**Macroéconomie (7 points) :**

Les comportements macroéconomiques au sein des deux grands secteurs institutionnels d'une économie peuvent être formalisés de la manière suivante :

Les entreprises investissent pour un montant  $I_0 = 2\ 300$

Les ménages consomment selon l'équation :  $C = 0.7Y + 2\ 500$

1- Calculez le revenu d'équilibre de cette économie. Sachant que le revenu de plein-emploi est égal à 19 200, dans quelle situation se trouve aujourd'hui l'économie considérée ?

2- Calculez quelle devrait être la valeur de la propension marginale à consommer des ménages pour que le revenu d'équilibre soit égal au revenu de plein emploi.

Soient  $X = 3\,340$ , les exportations du pays et  $M = 0.18Y + 100$ , ses importations.

3- Que représente le paramètre 0.18 ? Quelle analyse économique peut-on en déduire ?

4- Déterminez puis calculez le nouveau revenu d'équilibre de l'économie.

5- Calculez le solde commercial de cette économie. Quel devrait être le revenu national pour que le solde commercial soit équilibré ?

On suppose désormais que l'État intervient dans l'économie. Les comportements de ce secteur institutionnel sont formalisés par :

Impôts et taxes :  $T = 0.2Y + 1\,000$

Dépense publique :  $G = 1\,500$

6- Déterminez puis calculez le nouveau revenu d'équilibre de l'économie.

7- On suppose une augmentation de 10% des dépenses publiques. En déduire la valeur du multiplicateur des dépenses publiques financées par l'emprunt.

Les exportations du pays considéré dépendent à présent de la demande du reste du monde ( $Y^*$ ) avec :

$X = 0.9 Y^* + 1\,000$  et  $Y^* = 2\,600$

Suite à une crise financière, les pays du reste du monde voient leur revenu baisser de 15%.

8- On raisonne désormais à partir de l'équilibre initial de la question 6. Quelles sont les conséquences, pour l'économie nationale, de cette diminution de la demande externe ?

**Microéconomie (7 points) :**

**Exercice 1 :**

Soit l'entreprise Kanté dont la contrainte technologique est définie par la fonction :

$$Q(K,L) = 2.(K^{1/2} + L^{1/2})$$

Avec  $Q$  : la quantité produite

$K$  et  $L$  : les quantités utilisées de capital et de travail, respectivement.

On note  $w$  et  $r$  les prix en dollars d'une unité de travail et d'une unité de capital respectivement.

- 1- Analysez cette fonction de production : rendements d'échelle, productivités marginales, élasticité de la production par rapport aux quantités de facteurs.
- 2- Déterminez l'expression du taux marginal de substitution technique du capital au travail.
- 3- Le producteur dispose d'un budget de 100 dollars pour la production. Déterminez l'équation du sentier d'expansion ainsi que les demandes optimales du producteur en facteurs de production.
- 4- Calculez les demandes de facteur et la production associées à l'optimum lorsque le budget dont il dispose est de 58\$,  $r=1\$$  et  $w=2\$$ .
- 5- Faites la représentation associée à l'optimum précédent en y plaçant l'isoquante, le sentier d'expansion et la contrainte budgétaire. Vous aurez au préalable défini les équations de chacune de ces courbes.

### **Exercice2 :**

Supposons qu'il existe deux biens dans une économie : les mangues et les ignames. Supposons aussi que notre consommateur a une fonction d'utilité des deux biens de la forme décrite ci-dessous, où X désigne la quantité d'ignames et Y la quantité de mangues.

$$U = XY$$

- 1- Dessiner une courbe d'indifférence définie par cette fonction d'utilité qui représente un niveau d'utilité de 2,5.
- 2- Quel est le taux marginal de substitution entre les ignames et les mangues quand notre consommateur consomme 50 ignames et 50 mangues ? Quel est le taux marginal de substitution entre les deux biens, lorsqu'il consomme 100 ignames et 50 mangues ?
- 3- Si une unité d'ignames et une unité de mangues coûtent chacune 1 dollar et que notre consommateur dépense 100 dollars, quel panier de mangues et d'ignames achètera-t-il ?
- 4- Si le prix unitaire des ignames et des mangues est respectivement de 4 et 3 dollars, déterminer graphiquement et par le calcul quel panier de mangues et d'ignames le consommateur achèterait avec son revenu de 100 dollars.

### **Questions (6 points) :**

- 1- Le PIB est-il un bon indicateur pour mesurer le développement économique ?
- 2- Qu'est-ce qu'un pays économiquement ouvert ?
- 3- Quels sont les principaux déterminants de l'épargne ?

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

**Question n°1**

Pour l'année 2019, la répartition des salariés par catégorie et les salaires moyens par catégorie dans l'entreprise A sont donnés dans le tableau suivant :

Catégorie	Ouvriers	Employés	Cadres	Cadres supérieurs
Nombre de salariés	55	18	9	4
Salaire moyen	13 800,00	17 400,00	24 600,00	48 500,00

Déterminer la masse salariale pour chacune des catégories de salariés.

Déterminer le salaire moyen dans l'entreprise A.

### **Question n°2**

Pour l'année 2019, la répartition des salariés par catégorie et les masses salariales par catégorie de l'entreprise B sont données dans le tableau suivant :

Catégorie	Ouvriers	Employés	Cadres	Cadres supérieurs
Nombre de salariés	37	23	14	6
Masse salariale	492 100,00	379 500,00	331 800,00	270 000,00

L'entreprise B affirme : « Le salaire moyen dans notre entreprise est supérieur au salaire moyen dans l'entreprise A ». Justifier cette affirmation.

### **Question n°3**

L'entreprise A affirme : « Pour chaque catégorie de salariés, le salaire moyen d'un agent dans notre entreprise est supérieur au salaire moyen d'un agent dans l'entreprise B ». Justifier cette affirmation.

### **Question n°4**

Dans quelle entreprise souhaiteriez-vous travailler ? Justifier

### **Question n°5**

Pour 2020, une augmentation salariale intervient : l'entreprise B souhaite réduire l'écart entre les salaires moyens par catégorie de salariés avec ceux de l'entreprise A. Pour ce faire, elle augmente la masse salariale de chaque catégorie de 4 %.

A l'issue de cette augmentation, donner, par catégorie, l'écart entre les salaires moyens de l'entreprise A et ceux de l'entreprise B. Commenter

### **Question n°6**

Pour 2020, l'augmentation de 4 % de la masse salariale par catégorie ayant été validée, le tableau suivant donne, par catégorie, le nombre de salariés de l'entreprise B ayant bénéficié ou non d'une augmentation :

Catégorie	Ayant été augmenté	N'ayant pas été augmenté	Total
Ouvriers	19	18	37
Employés	19	4	23
Cadres	9	5	14
Cadres supérieurs	5	1	6
Total	52	28	80

Les ouvriers et employés affirment que les cadres ont été plus augmentés, notamment les cadres supérieurs. Justifier.

### **Question n°7**

Face à cette critique, la direction de l'entreprise B décide de suivre dans l'avenir l'évolution salariale annuelle des cadres supérieurs. L'évolution en pourcentage des salaires des 6 cadres supérieurs est donnée dans le tableau suivant :

Cadre 1 ( $X_1$ )	Cadre 2 ( $X_2$ )	Cadre 3 ( $X_3$ )	Cadre 4 ( $X_4$ )	Cadre 5 ( $X_5$ )	Cadre 6 ( $X_6$ )
4 %	6 %	0 %	8 %	2 %	4 %

- Calculer la moyenne et l'écart-type.
- Pour suivre l'évolution salariale dans les années à venir, l'entreprise décide de choisir au hasard 2 cadres supérieurs, formant ainsi un échantillon. Chaque cadre supérieur a la même probabilité d'être sélectionné. Combien d'échantillons peut-on former ? Expliciter les.
- Pour chaque échantillon, calculer la moyenne.
- Calculer la moyenne des chiffres obtenus à la question précédente. Justifier le résultat.