Avril 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Exercice 1.

On a au voisinage 0,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4\epsilon(x)\,,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x)\,.$$

On s'aperçoit qu'en fait un dl à l'ordre 2 suffit et on a

$$e^{x^2} - \cos(x) = \frac{3x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\,,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{3}{2} + \epsilon(x)\Big) = \frac{3}{2}\,.$$

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) \;=\; \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$: sur $]0, +\infty[$ elle est constante et sur $]-\infty, 0[$ c'est la composé de fonctions dérivables.
   Montrons la dérivabilité au point 0. La dérivée à droite de 0 est nulle, car f est constante à droite de 0. Calculons la dérivée à gauche,

   $$f'_g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{X\to -\infty} Xe^X = 0 = f'_d(0)\,.$$

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

   $$f'(x) \;=\; \begin{cases} -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. De même, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f''(x) = 0$, $\forall x \in]0,+\infty[$, elle est dérivable sur $]-\infty, 0[$ car c'est la composé de fonctions dérivables. Étudions l'existence de f'' au point 0, $f''_d(0) = 0$ car f' est constante sur $]0,+\infty[$, on a
$$f''_g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x) - f'(0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = \lim_{X\to-\infty} X^3 e^X = 0 = f'_d(0)\,.$$
On en déduit que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Problème.

1. On considère dans cette question la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par :
$$u_n = \frac{1.3....(2n-1)}{2.4...(2n)} = \prod_{k=1}^{n}(\frac{2k-1}{2k})\,.$$
   (a) On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$,
   donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \dfrac{n+n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{2\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n(n+1)}} > 0.$

   (b) On peut utiliser le développement limité de la fonction $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 : posons $X_n = \dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1$, d'après la question précédente
$$X_n = \frac{\left[(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\right]^2}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2\sqrt{n(n+1)}}.$$
   On a alors, $w_n \sim X_n \sim \dfrac{1}{8n^2}$. Par conséquent $\sum w_n$ converge.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} w_n = \ln\frac{v_{N+1}}{v_1} = \ln 2v_{N+1}$; donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $u_n < \dfrac{L}{\sqrt{n}}$.

2. (a) On montre par récurrence que
$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= (-1)^n\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)(1-x)^{\frac{1}{2}-n}\\ &= -\frac{(2n-3)(2n-5)...1}{2^n}\frac{1}{(\sqrt{1-x})^{2n-1}}.\end{aligned}$$

   (b) Par la formule de Taylor avec reste intégrale $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où
$$a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = -\frac{(2k-3)(2k-5)...1}{k!\,2^k}.$$
   On peut exprimer les coefficients du polynômes P en fonction des termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$;
$$a_k = -\frac{u_{k-1}}{2k}\,, \qquad a_1 = -\frac{1}{2}.$$

$P_4(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4.$

(c) En utilisant l'indication $x - t \leq 1 - t$, on a

$$\begin{aligned} |\,R_n(x)| &= \frac{1}{n!}\int_0^x (1-t)^n \frac{1...(2n-1)}{2^{n+1}} \frac{1}{(\sqrt{x-t})^{2n+1}} dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^x u_n \frac{(1-t)^n}{(1-t)^{n+\frac{1}{2}}} dt = \frac{u_n}{2}\int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt\,, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé dans la première égalité le fait que $x < 1$ et que l'intégrale est prise sur $t \in [0, x] \subset [0, 1[$.

Comme, de plus $\displaystyle\int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = -2\left[\sqrt{1-t}\right]_0^x = 2(1 - \sqrt{1-x}) < 2$, on obtient $|\,R_n(x)| < u_n$.

(d) D'après 1.c, $|\,P_n(x) - \varphi(x)| \leq u_n < \frac{L}{\sqrt{n}}$ $\forall x \in [0, 1[$ et aussi en $x = 1$ par continuité des fonctions P_n et φ. Donc la suite (P_n) converge uniformément vers φ sur $[0, 1]$.

(e) De même, pour $x \in [-1, 1]$, $y = 1 - x^2 \in [0, 1]$, d'où

$$|\,P_n(y) - \varphi(y)| = |\,Q_n(x) - |x|| < \frac{L}{\sqrt{n}}.$$

Donc, pour tout $n \geq \frac{L^2M^2}{\varepsilon^2}$, $|\,Q_n(x) - |x|| \leq \frac{\varepsilon}{M}$.

3. (a) Entre $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, le graphe de la fonction g est le segment d'une droite d'équation $g(x) = ax + b$, avec $g(k/n) = f(k/n) = a(k/n) + b$ et $g((k+1)/n) = f((k+1)/n) = a\big((k+1)/n\big) + b$. On résout ce système d'équations d'inconnues a et b et on obtient :

$$g(x) = n\Big(f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})\Big)\, x \,+\, (k+1)f(\frac{k}{n}) - kf(\frac{k+1}{n}). \tag{1}$$

(b) On réécrit l'expression de la fonction g pour utiliser l'indication : pour $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$,

$$g(x) = (1-\alpha)f(\frac{k}{n}) + \alpha f(\frac{k+1}{n}) = (k+1-nx)f(\frac{k}{n}) + (nx-k)f(\frac{k+1}{n})\,,$$

$(\alpha = nx - k)$. On a

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &= \left|(1-\alpha)(f(\frac{k}{n}) - f(x)) + \alpha(f(\frac{k+1}{n}) - f(x))\right| \\ &\leq \left|(1-\alpha)(f(\frac{k}{n}) - f(x))\right| + \left|\alpha(f(\frac{k+1}{n}) - f(x))\right| \\ &= (1-\alpha)\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right| + \alpha\left|f(\frac{k+1}{n}) - f(x)\right| \\ &\leq (1-\alpha)\varepsilon + \alpha\varepsilon = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Cette majoration étant vraie pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, elle s'applique pour tout $x \in [0, 1]$.

4. On rappelle les définitions de $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & n \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 1 \\ n & \ddots & \ddots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{n+1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} & 1/2 & 0 & \ddots & 0 & \dfrac{1}{2n} \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & 1/2 & \ddots & 1/2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & -1 & 1/2 \\ \dfrac{1}{2n} & 0 & \ddots & 0 & 1/2 & -\frac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} \end{pmatrix}$$

(a) En suivant les étapes indiquées dans l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n & n-1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \quad = \quad (-1)^n n 2^{n-1} \neq 0\,.
\end{aligned}$$

(b) On déduit de la question précédente que puisque $\det(A_{n+1}) \neq 0$, la matrice A_{n+1} est inversible, il suffit alors de vérifier que $B_{n+1} \times A_{n+1} = \mathrm{I}_{n+1}$, où I_{n+1} désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$: notons $M = B_{n+1} \times A_{n+1} = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n+1}$

(i) Pour $2 \leq i \leq n+1$, pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$,

$$\begin{aligned}
m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} b_{i,k} a_{k,j} &= b_{i,i+1} a_{i+1,j} + b_{i,i-1} a_{i-1,j} + b_{i,i} a_{i,j} \\
&= \frac{1}{2} a_{i+1,j} + \frac{1}{2} a_{i-1,j} - a_{i,j} \\
&= \frac{1}{2} |j-i-1| + \frac{1}{2} |j-i+1| - |j-i| \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } j = i\,, \\ 0 & \text{si } j \neq i\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) Pour $i=1$, pour tout $j\in\{1,2,\cdots,n+1\}$,

$$\begin{aligned}m_{1,j}=\sum_{k=1}^{n+1}b_{1,k}a_{k,j}&=\big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\big)a_{1,j}+\frac{1}{2}a_{2,j}+\frac{1}{2n}a_{n+1,j}\\&=\big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\big)|j-1|+\frac{1}{2}|j-2|+\frac{1}{2n}|n+1-j|\\&=\begin{cases}1 & \text{si } j=1\,,\\ 0 & \text{si } j\neq 1\,.\end{cases}\end{aligned}$$

(iii) Pour $i=n+1$, pour tout $j\in\{1,2,\cdots,n+1\}$,

$$\begin{aligned}m_{n+1,j}=\sum_{k=1}^{n+1}b_{n+1,k}a_{k,j}&=\frac{1}{2n}a_{1,j}+\frac{1}{2}a_{n,j}+\big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\big)a_{n+1,j}\\&=\frac{1}{2n}|j-1|+\frac{1}{2}|n-j|+\big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\big)|n+1-j|\\&=\begin{cases}1 & \text{si } j=n+1\,,\\ 0 & \text{sinon}\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que pour tout $1\leq i,j\leq n+1$, $m_{i,j}=\delta_{i,j}$. Donc $M=\mathrm{I}_{n+1}$.

5. (a) - L'application Φ est linéaire : soient $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ et $g_1,g_2\in E_{n+1}$

$$\begin{aligned}\Phi(a_1g_1+a_2g_2)&=(a_1g_1(k/n)+a_2g_2(k/n))_{0\leq k\leq n}\\&=a_1(g_1(k/n))_{0\leq k\leq n}+a_2(g_2(k/n))_{0\leq k\leq n}\\&=a_1\Phi(g_1)+a_2\Phi(g_2)\,.\end{aligned}$$

- Φ est un isomorphisme : toute fonction g de E_{n+1} est entièrement caractérisée par ses valeurs a_k aux points $\frac{k}{n}$, $0\leq k\leq n$. En effet, comme dans l'expression (1), pour tout $\alpha=(a_0,a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, et tout $g\in E_{n+1}$, $\Phi(g)=\alpha$ si et seulement si, pour tout $0\leq k\leq n$ et pour tout $x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$,

$$g(x)=n(a_{k+1}-a_k)x+(k+1)a_k-ka_{k+1}=(k+1-nx)a_k+(nx-k)a_{k+1}\,,$$

et $g(k/n)=a_k$ pour tout $0\leq k\leq n+1$.

(b) $\Phi(f_j)$ est le vecteur $\frac{1}{n}\,(j,j-1,\ldots,1,0,1,\ldots,n-j)=\frac{1}{n}\,{}^tU_j$, où ${}^tU_j$ est la transposée du j-ème vecteur colonne de la matrice A_{n+1}.

La matrice de la famille des vecteurs $(\Phi(f_j))_{0\leq j\leq n}$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est donc $\frac{1}{n}A_{n+1}$

Comme A_{n+1} est inversible, $(\Phi(f_j))_{0\leq j\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ et comme Φ est un isomorphisme, $(f_j)_{0\leq j\leq n}$ est une base de E_{n+1}.

(c) La fonction g_α se décompose selon la base $(f_j)_{0\leq j\leq n}$:

$$g_\alpha=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kf_k.$$

D'où

$$\Phi(g_\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Phi(f_k)$$

soit

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A_{n+1} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = B_{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \lambda_0 &= \frac{1-n}{2n} a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2n} a_n \,, \\ \\ \lambda_k &= \frac{1}{2} a_{k-1} - a_k + \frac{1}{2} a_{k+1} \qquad \text{si } 0 < k < n \,, \\ \\ \lambda_n &= \frac{1}{2n} a_0 + \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1-n}{2n} a_n. \end{cases}$$

6. (a) Par la définition de g, on a $g_\alpha = g$ avec $\alpha = (a_0, \dots, a_n)$ et $a_k = f(\frac{k}{n})$.
D'après la question de la précédente,

$$\begin{cases} \lambda_0 &= \frac{1-n}{2n} f(0) + \frac{1}{2} f(1/n) + \frac{1}{2n} f(1) \\ \\ \lambda_k &= \frac{1}{2} f((k-1)/n) - f(k/n) + \frac{1}{2} f((k+1)/n) \qquad \text{si } 0 < k < n \\ \\ \lambda_n &= \frac{1}{2n} f(0) + \frac{1}{2} f(1-1/n) + \frac{1-n}{2n} f(1). \end{cases}$$

(b) Rappelons que $R(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_N(x - \frac{k}{n})$. Soit $x \in [0,1]$, par l'inégalité triangulaire et la question 3. (b),

$$\left|f(x) - R(x)\right| \leq \left|f(x) - g(x)\right| + \left|g(x) - R(x)\right| \leq \varepsilon + \left|g(x) - R(x)\right|.$$

Puis en utilisant les définitions de g et R,

$$\begin{aligned} \left|g(x) - R(x)\right| &= \Big|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_N(x - \frac{k}{n})\Big| \\ &= \Big|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \big(f_k(x) - Q_N(x - \frac{k}{n})\big)\Big| \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \Big||x - \frac{k}{n}| - Q_N(x - \frac{k}{n})\Big|. \end{aligned}$$

Enfin, comme $|x - \frac{k}{n}| \leq 1$ pour tout entier $k \in [0, n]$ et tout réel $x \in [0,1]$, d'après la question 2. (e) et les deux inégalités précédentes, on obtient

$$\left|g(x) - R(x)\right| \leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \frac{\varepsilon}{M} = 2\varepsilon.$$

(c) Le théorème de Weierstraß se déduit immédiatement des questions précédentes.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel *m*, les solutions du système d'équations linéaires suivant, où *a, b, c* sont des nombres réels :

$$\begin{cases} x - y + (m-2)z = a \\ 2x + (m-4)y - 2z = b \\ (m+2)x - 4y - 3z = c \end{cases}$$

Soit M la matrice du système, à savoir $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et son déterminant est égal à : $\det M = (2-m)(m-1)^2$ (on peut additionner la deuxième colonne à la première, puis soustraire la troisième ligne à la deuxième).

a) Si $m \neq 2$ et $m \neq 1$, la matrice est inversible et le système admet une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

b) Si m=1, le système devient $\begin{cases} x - y - z = a \\ 2x - 3y - 2z = b \\ 3x - 4y - 3z = c \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x - y - z = a \\ 2x - 3y - 2z = b \\ x - y - z = c - b \end{cases}$

Si $a \neq c - b$, le système n'a pas de solution et si $a = c - b$, l'ensemble des solutions est de la forme : $(x, 2c - 3b, x - 3c + 4b)$

c) Si m=2, le système devient $\begin{cases} x-y=a \\ z=(2a-b)/2 \\ z=(4a-c)/3 \end{cases}$

Si $2a+3b-2c\neq 0$, le système n'a pas de solution et si $2a+3b-2c=0$, l'ensemble des solutions est de la forme : $(x, x-a, (2a-b)/2)$

2. On note f l'application linéaire associée à la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, où m est un paramètre réel.

- Pour quelles valeurs de m, l'application f est-elle bijective ?

D'après la question précédente (comme M est la matrice du système), f est bijective si et seulement si $m\neq 2$ et $m\neq 1$.

- Pour quelles valeurs de m, le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires ?

Il suffit de trouver pour quelles valeurs de m, $Ker\, f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}$.

Si $m\neq 2$ et $m\neq 1$, la solution unique est le vecteur nul et $Ker\, f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}$

Si m=1, alors un vecteur de la forme $(a,0,a)$ est dans le noyau et l'image, donc $Ker\, f\cap \mathrm{Im} f\neq\{0\}$.

Si m=2, alors un vecteur du noyau est de la forme $(a,a,0)$ et il n'est pas dans l'image (sauf le vecteur nul), donc $Ker\, f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}$.

En conclusion, le noyau et l'image sont supplémentaires si et seulement si $m\neq 1$.

3. Déterminer les valeurs propres de la matrice M dans les deux cas suivants : $m=2$ et $m=1$ (on indiquera si la matrice est diagonalisable ou non).

Dans les deux cas, 0 est une valeur propre.

Pour m=1, les valeurs propres sont : -5 et 0 (double). Comme la dimension du noyau est égale à 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

Pour m=2, les valeurs propres sont : -5, 0 ,1 et la matrice est diagonalisable.

Exercice n° 2

Pour n entier naturel, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx$.

1. Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in [0, \pi/4], \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$ et calculer I_0.

On identifie les deux côtés de l'égalité (et en prenant x=0) pour obtenir : $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$, d'où a=b=1/2.

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) dx = \frac{1}{2} \left[Ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} Ln(3 + 2\sqrt{2})$$

2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{2n-1} x . \cos^2 x} dx = \left[\frac{tg\, x}{\cos^{2n-1} x} \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{(2n-1)\, tg\, x \sin x}{\cos^{2n} x.} dx \text{ et}$$

$$I_n = (\sqrt{2})^{2n-1} - (2n-1) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1} x} dx = (\sqrt{2})^{2n-1} - (2n-1)(I_n - I_{n-1})$$

En conclusion : $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} + \frac{2^{n-1/2}}{2n}$

3. Calculer I_2

On a : $I_1 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}; I_2 = \frac{3}{4} I_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $I_2 = \frac{3}{8} I_0 + \frac{7}{4\sqrt{2}}$ et $I_2 = \frac{3}{16} Ln(3 + 2\sqrt{2}) + \frac{7}{4\sqrt{2}} 4.$

4. Etudier la convergence de la suite (I_n). On a : $I_n \geq 0$, et $I_n \geq \frac{2^{n-1/2}}{2n}$, donc $I_n \to +\infty$

Exercice n° 3

Soit la fonction *f* définie sur $\left]-\infty,1\right[$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x^2} & \text{si } 0<x<1\\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x\leq 0\end{cases}$

1. Etudier les variations de *f* sur $\left]-\infty,1\right[$.

Pour $0<x<1$, $f'(x)=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}>0$ et pour $x\leq 0$, $f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\geq 0$. La fonction est donc strictement croissante de $\left]-\infty,1\right[$ sur R^+.

2. Etudier la dérivabilité de *f* en 0.

La fonction est dérivable en 0, car $f_d'(0)=f_g'(0)=0$

3. Tracer le graphe de *f* (on précisera les points d'inflexion).

Pour $0<x<1$, $f''(x)=\dfrac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}>0$ et pour $x\leq 0$, $f''(x)=\dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. La fonction est convexe sur $\left]0,1\right[$. Le point $A(0,\ 1)$ est un point d'inflexion. La fonction est concave sur l'intervalle $\left]-1/\sqrt{3},0\right[$, le point $B(-1/\sqrt{3},3/4)$ est aussi un point d'inflexion et la fonction est convexe pour $x<-1/\sqrt{3}$. L'axe Ox est une asymptote à $-\infty$, la droite verticale d'équation x=1 est également une asymptote.

4. Calculer l'aire comprise entre le graphe de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équation *x*=1/2 et *x*=-1/2.

L'aire est égale à $I=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}f(x)\,dx=\int_{-1/2}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int_{0}^{1/2}\frac{1}{1-x^2}\,dx$, d'où

$$I=\left[Arctg\,x\right]_{-1/2}^{0}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1/2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=Arctg\,(1/2)+\frac{1}{2}Ln3$$

Exercice n° 4

Pour α entier naturel, on considère la fonction f_α définie sur R^+ par : $f_\alpha(x) = \alpha x + Ln(1+x^2)$

1. Etudier les variations de f_α selon les valeurs de α (on précisera la convexité ou non de la fonction).

- Si $\alpha = 0$, sa dérivée est égale à : $f'_\alpha(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \geq 0$, la fonction est paire et croissante de R^+ sur R^+, avec une branche parabolique dans la direction *Ox*. On a : $f''_\alpha(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. La fonction est donc convexe sur $[0,1]$ et concave pour *x*>1. On a aussi $f_\alpha(0) = f'_\alpha(0) = 0$.

- Si $\alpha \neq 0$, $y = \alpha x$ est une direction asymptotique et $f'_\alpha(x) = \alpha + \dfrac{2x}{1+x^2} \geq 0$. La fonction est strictement croissante et sa dérivée seconde est la même que précédemment, donc elle est convexe sur $[-1,1]$ et concave pour *x*>1 et *x*< -1.

2. Tracer le graphe de f_2.

La question précédente donne tous les éléments pour tracer le graphe.

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_0(u_n)$ et $u_0 > 0$.

La suite est toujours à termes strictement positifs. Si $(u_n) \to l$, cette limite est un point fixe de la fonction. Soit $y = x - Ln(1+x^2)$, dont la dérivée est : $y' = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$ et la fonction est strictement croissante, et la seule limite possible est zéro.

Par ailleurs, on a : $u_{n+1} - u_n = Ln(1+u_n{}^2) - u_n < 0$, la suite étant décroissante et minorée , elle converge vers 0.

4. Etudier la convergence de la suite (v_n) définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = f_\alpha(v_n)$ et $v_0 > 0$, avec $\alpha > 1$.

Comme précédemment, la suite est à termes positifs et sa seule limite possible est zéro (même démarche) : En posant $y = x(\alpha-1) + Ln(1+x^2)$, on a $y' = \dfrac{x^2(\alpha-1) + 2x + (\alpha-1)}{1+x^2} \geq 0$ mais

$v_{n+1} - v_n = Ln(1+v_n{}^2) + (\alpha - 1)v_n > 0$. La suite étant croissante, elle ne pas peut converger vers 0. Comme elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

5. Calculer $I_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$

On calcule l'intégrale de $Ln(1+x^2)$ par parties pour obtenir :

$$I_\alpha = \frac{\alpha}{2} + \int_0^1 Ln(1+x^2)\,dx = \frac{\alpha}{2} + \left[x\,Ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\alpha}{2} + Ln2 - 2\left[x - Arctgx\right]_0^1$$

$$I_\alpha = \frac{\alpha}{2} + Ln2 - 2(1 - \frac{\pi}{4})$$

Exercice n° 5

Pour $k \in R$, soit la fonction $f_k : R^2 \to R^2$ définie par :

$$f_k(x,y) = \left((\frac{1+k}{2})x + (\frac{1-k}{2})y, (\frac{1-k}{2})x + (\frac{1+k}{2})y \right)$$

1. Pour quelles valeurs de *k*, la fonction f_k est-elle bijective ?

La matrice associée à f_k (linéaire) est $M_k = \begin{pmatrix} \frac{1+k}{2} & \frac{1-k}{2} \\ \frac{1-k}{2} & \frac{1+k}{2} \end{pmatrix}$ et son déterminant $\det M_k = k$.

L'application est donc bijective si $k \neq 0$.

2. Soit f_k^{-1} l'application réciproque de f_k quand elle existe. Comparer f_k^{-1} et $f_{1/k}$.

On trouve facilement $f_k^{-1} = f_{1/k}$ car $f_k o f_{1/k} = I$

3. Quels sont les invariants de f_k ?

$f_k(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} (1+k)x + (1-k)y = 2x \\ (1-k)x + (1+k)y = 2y \end{cases}$, d'où $(1-k)(x-y) = 0$

En conclusion :

- Si k=1, la fonction est l'identité et tous les points de R^2 sont des invariants.

- Si $k \neq 1$, la droite y=x correspond aux invariants.

4. On suppose k=3, quelle est l'image du cercle de centre 0 et de rayon 1 par f_3 ?

La matrice de l'application est : $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $f_3(x,y) = (x', y')$, on obtient :

Soit $\begin{cases} 2x - y = x' \\ -x + 2y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{3}(x' + 2y') \end{cases}$

Pour un point du cercle, on a : $x^2 + y^2 = 1$, soit $5(x')^2 + 5(y')^2 + 8x'y' = 9$. Les deux bissectrices sont des axes de symétrie et en faisant une rotation d'angle $\pi/4$, soit $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$ ou encore $= \left(\frac{X}{3}\right)^2 + Y^2 = 1$, il s'agit d'une ellipse.

5. Peut-on trouver une valeur de k pour laquelle f_k correspond à une projection sur une droite (que l'on précisera), à une symétrie par rapport à une droite (que l'on précisera) ?

Si f_k est une projection, ses valeurs propres sont 0 et 1. Par conséquent le déterminant de la matrice associée est nul, et d'après la première question, la seule possibilité est k=0.

La matrice est donc $M_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et qui correspond à une projection orthogonale sur la première bissectrice.

Si f_k est une symétrie, ses valeurs propres sont -1 et 1. Par conséquent le déterminant de la matrice associée est égal à -1 et d'après la première question, la seule possibilité est k=-1.

La matrice est donc $M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et qui correspond à une symétrie par rapport à la première bissectrice.