ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

CORRIGÉ de MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1. La dérivée de la fonction f_n est définie par $f'_n(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Pour tout $x>0$, $f'_n(x)>0$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus $f_n(0)=-1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$. On en déduit que f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$ et comme $0\in[-1,+\infty[$ il existe une unique réel u_n strictement positif tel que $f_n(u_n)=0$.

2. $u_1=1$ et u_2 est la solution positive de l'équation $x^2+x-1=0$; $u_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. $f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^{n+1}$, ainsi $f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+u_n^{n+1}$ et donc $f_{n+1}(u_n)=u_n^{n+1}$. On en déduit que $f_{n+1}(u_n)>0$ et donc que $f_{n+1}(u_n)>f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_{n+1} est croissante, $u_n>u_{n+1}$; la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0 elle est convergente.

4. $f_n(x)+2=\sum_{K=0}^{n} x^k=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Ainsi $f_n(u_n)+2=\frac{u_n^{n+1}-1}{u_n-1}$ d'où $2u_n-2=u_n^{n+1}-1$ et finalement $u_n=\frac{1}{2}(1+u_n^{n+1})$. On sait que pour tout *n*, $u_n<u_2$ donc $u_n<0,7$. Par conséquent $0<u_n^{n+1}<0,7^{n+1}$. $\lim_{n\to+\infty} 0,7^{n+1}=0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1}=0$ et ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. $f'(x)=\frac{1}{x^n}-(n-1)\frac{\ln(x)}{x^n}$.

2. Grâce au résultat précédent on a $\frac{\ln(x)}{x^n}=\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^n}-\frac{1}{n-1}f'(x)$. On en déduit

   que $I_n(A)=\frac{-1}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{A^{n-1}}-1\right)-\frac{1}{n-1}(f(A)-f(1))$. Or $\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^{n-1}}=0$ car $n\geqslant 2$ et

   $\lim_{A\to+\infty}\frac{\ln(A)}{A^{n-1}}=0$, donc $\lim_{A\to+\infty}I_n(A)=\frac{1}{(n-1)^2}$.

3. a) On doit avoir $\int_1^{+\infty}\frac{k\ln(x)}{x^4}=1\,\mathrm{d}x$ c'est à dire $\frac{k}{(4-1)^2}=1$ donc $k=9$.

b) $E(X)=\int_1^{+\infty}x\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}9\ln\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$. $E(X^2)=\int_1^{+\infty}x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}9\ln\frac{(x)}{x^2}\mathrm{d}x=9$.

$V(X)=9-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{63}{16}$.

Exercice 3

1. L'image de *f* est engendrée par les vecteurs colonnes de sa matrice, donc ici par les $(n-1)$ premières colonnes qui sont clairement indépendantes. L'image de *f* est l'espace engendré par $\sum_{i=1}^{n}e_i$, e_2 , ..., e_{n-1} . Sa dimension est $n-1$, on en déduit que le noyau est de dimension 1 ; il est engendré par e_1-e_n car $f(e_1-e_n)=f(e_1)-f(e_n)=0$.

2. Les $(n-2)$ colonnes centrales de $N-I_n$ sont nulles et les deux colonnes restantes sont clairement indépendantes, donc cette matrice est de rang 2.

3. Le noyau étant de dimension 1 ; 0 est une valeur propre dont le sous espace propre associé est engendré par e_1-e_n . De la question 2. il résulte que 1 est valeur propre et son sous espace propre associé est engendré par e_2 , ..., e_{n-1} .

4. Le calcul donne $f(u)=(2,4,4,\ldots.4,2)=2u$. On en déduit que 2 est valeur propre, Son sous espace propre associé est nécessairement de dimension 1 ; il est engendré par *u*.

5. Bilan de ce qui précède : *f* possède une base de vecteurs propres. Elle est constituée de $(1,0,\ldots,0,-1)$ associé à 0, e_2 , …., e_{n-1} associés à 1 et u associé à 2. Donc N est diagonalisable. La matrice diagonale D semblable à N est ainsi constituée : sa diagonale principale est 0, 1, 1 …. , 1, 2. La matrice P a pour colonnes les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ ….. , $\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \ldots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Dans le cas où $n=4$, $N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et

$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$N^k=PD^kP^{-1}$ et $D^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$. Le calcul aboutit à

$N^k=\begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 0 & 2^{k-1} \\ 2^k-1 & 1 & 0 & 2^k-1 \\ 2^k-1 & 0 & 1 & 2^k-1 \\ 2^{k-1} & 0 & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. Notons N l'événement « l'individu choisi est atteint par le virus » , T l'événement « le test est positif » et $\overline{N}$ et $\overline{T}$ les événements contraires. On cherche $P_T(V)$.

$P_T(V)=\frac{P(V\cap T)}{P(T)}=\frac{P(V\cap T)}{P(V\cap T)+P(\bar{V}\cap T)}$ ce qui donne

$P_T(V)=\frac{0{,}99\,p}{0{,}99\,p+0{,}01(1-p)}=\frac{99\,p}{1+98\,p}$.

2. Dans le cas où $p=\dfrac{2}{1000}$, on a $P_T(V)=\dfrac{0{,}198}{1}+0{,}196=\dfrac{198}{1196}$. On peut dire que

$P_T(V)\simeq\dfrac{1}{6}$.

3. Ce résultat montre que le test n'est pas fiable ; pour l'améliorer il faudrait que la probabilité initiale de 99 % soit très supérieure.

Exercice 5

1. X_1 suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{m}$. Son espérance est $\dfrac{n}{m}$ et

   sa variance $n\times\dfrac{1}{m}\times\left(1-\dfrac{1}{m}\right)=\dfrac{n(m-1)}{m^2}$.

2. Y suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{2}{m}$. Son espérance est $\dfrac{2n}{m}$ et sa

   variance $n\times\dfrac{2}{m}\times\left(1-\dfrac{2}{m}\right)=\dfrac{2n(m-2)}{m^2}$.

3. Si les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, alors

   $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)$. Or $V(X_1+X_2)=\dfrac{2n(m-2)}{m^2}$ et

   $V(X_1)+V(X_2)=\dfrac{2n(m-1)}{m^2}$. Les variables X_1 et X_2 ne sont donc pas

   indépendantes.

4. $T=\sum_{i=1}^{m} iX_i$. $E(T)=\sum_{i=1}^{m} iE(X_i)$, donc $E(T)=\dfrac{n}{m}\sum_{i=1}^{m} i=\dfrac{n}{m}\,\dfrac{m(m+1)}{2}=\dfrac{n(m+1)}{2}$.

5. N_k suit la loi uniforme : pour tout $i\in[\![1;m]\!]$, $P(N_k=i)=\dfrac{1}{m}$. $E(N_k)=\dfrac{m+1}{2}$ et

   $V(N_k)=\dfrac{m^2-1}{12}$.

6. $T=\sum_{k=1}^{n} N_k$. $E(T)=\sum_{k=1}^{n} E(N_k)=\dfrac{n(m+1)}{2}$. Comme les N_k sont indépendantes, la

   variance de T s'obtient en écrivant $V(T)=\sum_{k=1}^{n} V(N_k)$, soit $V(T)=\dfrac{n(m^2-1)}{12}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

CORRIGÉ d'ÉCONOMIE

Macroéconomie (7 points) :

Les comportements macroéconomiques au sein des deux grands secteurs institutionnels d'une économie peuvent être formalisés de la manière suivante :
Les entreprises investissent pour un montant Io = 2300
Les ménages consomment selon l'équation : C = 0.7Y +2500

1- Calculez le revenu d'équilibre de cette économie. Sachant que le revenu de plein-emploi est égal à 19200, dans quelle situation se trouve aujourd'hui l'économie considérée ?

A l'équilibre Offre Globale (OG) = Demande Globale (DG)

Donc $Ye = C + I$
$Ye = cYe+Co+Io$
$Ye = (Co+Io) / (1-c)$

A.N. $Ye = 4800 / 0.3 =$ <u>16000 u.m.</u>
Ce revenu d'équilibre est inférieur au revenu de plein emploi (16000 < 19200). L'économie est donc en situation de sous-emploi c'est-à-dire qu'une part de la population active n'est pas employée et se retrouve en situation de chômage.

2- Calculez quelle devrait être la valeur de la propension marginale à consommer des ménages pour que le revenu d'équilibre soit égal au revenu de plein emploi.

On a trouvé précédemment que $Ye = (Co+Io) / (1-c)$
On cherche c pour lequel Ye = 19200, Co et Io restant inchangés.
On a donc $c = 1 - (Co+Io)/Ye$
A.N. $c = 1- 4800/19200 =$ <u>0.75</u>
La propension marginale nécessaire pour être dans une situation de plein emploi est donc 0.75.

Soient X= 3340, les exportations du pays et M = 0.18Y+100, ses importations.

3- **Que représente le paramètre 0.18 ?**

Ce paramètre représente la propension marginale à importer c'est-à-dire la variation du niveau d'importation consécutive à la variation d'une unité du revenu. La propension marginale à importer est donc un indicateur du degré de dépendance de la structure productive d'une économie vis-à-vis de ses produits importés.

4- **Déterminez puis calculez le nouveau revenu d'équilibre de l'économie.**

En économie ouverte l'équilibre est formalisé en tenant compte des importations et des exportations :
OG = Y + M
DG = C + I + X
A l'équilibre OG= DG
Donc Ye + mYe + Mo = cYe + Co + Io + Xo

$$Ye = \frac{1}{1 + m - c}(Co + Io + Xo - Mo)$$

A.N. Ye = 8040/0.48 = <u>16 750 u.m.</u>

5- **Calculez le solde commercial de cette économie. Quel devrait être le revenu national pour que le solde commercial soit équilibré ?**

Solde commercial = X – M = Xo – mYe – Mo
A.N. SC = 3340 - 0.18*16750 - 100 = <u>225 u.m.</u>
Ce solde étant positif on a un excédent de la balance commerciale.

Pour une balance équilibrée, on a un solde égal à zéro : SC = O
Donc Xo - mY- Mo = 0
Y = (Xo-Mo)/m
A..N. Y = 3240/0.18 = <u>18 000 u.m.</u>

On suppose désormais que l'Etat intervient dans l'économie. Les comportements de ce secteur institutionnel sont formalisés par :
T = 0.2Y + 1000
G = 1500

6- **Déterminez puis calculez le nouveau revenu d'équilibre de l'économie.**

En économie ouverte avec intervention de l'État, l'équilibre peut être formalisé de la façon suivante :

OG = Y + M
DG = C + I + G + X
DG = cYd + Co + Io + Go + Xo

DG = c(Y-T) + Co + Io + Go + Xo
DG = c(Y-tY-To) + Co + Io + Go + Xo
DG = c(1-t)Y –cTo + Co + Io + Go + Xo

À l'équilibre OG = DG
Ye + mYe + Mo = c(1-t)Ye –cTo + Co + Io + Go + Xo

$$Ye = \frac{1}{1 + m - c(1-t)} (-\text{cTo} + \text{Co} + \text{Io} + \text{Go} + \text{Xo} - \text{Mo})$$

A.N. Ye = 8840 / 0.62 = 14258,06 u.m.

7- **On suppose une augmentation de 10% des dépenses publiques. En déduire la valeur du multiplicateur des dépenses publiques financées par l'emprunt.**

Go est désormais égal à 1650 u.m. (1500 + 150)

Le nouveau revenu d'équilibre suite à l'augmentation des dépenses publiques est désormais :

Ye' = (8840+150) / 0.62 = 14500 u.m.

Le multiplicateur des dépenses publiques g = ΔY/ΔGo = (14500-14258,06) / (1650-1500)
g =1,61

Les exportations du pays considéré dépendent à présent de la demande du reste du monde (Y*) avec :

X = 0.9 Y* + 1000 et Y* = 2600

Suite à une crise financière, les pays du reste du monde voient leur revenu baisser de 15%.

8- **On raisonne désormais à partir de l'équilibre initial de la question 6. Quelles sont les conséquences pour l'économie nationale de cette diminution de la demande externe ?**

Suite à la crise Y* est désormais égal à 2210 (2600 - 0.15*2600)

Les conséquences de cette diminution (- 390 u.m.) de la demande extérieure sont les suivantes :

- Au niveau des exportations : X' = 0.9*2210 + 1000 = 2989 u.m. donc ΔX = 2989 -3340 = -351 u.m.

- Au niveau du revenu national : Ye' = (8840-351) / 0.62 = 8489 / 0.62 = 13691,935 u.m. donc ΔYe = 13691,935 - 14258,06 = -566,129 u.m.

- Au niveau de la consommation : $\Delta C = 0,7.\Delta Y = 0.7*(-566,129) =$ <u>- 396,29 u.m.</u>

- Au niveau des importations : $\Delta M = 0,18.\Delta Y =$ <u>- 101,03 u.m.</u>

- Au niveau des impôts : $\Delta T = 0.2\ \Delta Y =$ <u>- 113,258 u.m.</u>

Microéconomie (7 points) :

<u>Exercice 1 :</u>

Soit l'entreprise Kanté dont la contrainte technologique est définie par la fonction :

$$Q(K,L) = 2.(K^{1/2} + L^{1/2})$$

Avec Q : la quantité produite
K et L : les quantités utilisées de capital et de travail, respectivement.
On note w et r les prix en dollars d'une unité de travail et d'une unité de capital respectivement.

1/ Analysez cette fonction de production : rendements d'échelle, productivités marginales, élasticité de la production par rapport aux quantités de facteurs.

- Rendements d'échelle

Pour cela, calculons :

$f(\lambda.K,\lambda.L)=2.(\lambda.K)^{1/2}+2.(\lambda.L)^{1/2}=2.\lambda^{1/2}.K^{1/2}+2.\lambda^{1/2}.L^{1/2}=\lambda^{1/2}.f(K,L)$ pour tout scalaire λ.

Donc les rendements d'échelle sont décroissants i.e. que si tous les facteurs sont multipliés par 2 la production fait moins que doubler (elle augmente seulement de racine de 2).

- Productivités marginales

Comme $X=f(K,L)=2.K^{1/2}+2.L^{1/2}$, *on a :*

- pour le travail $\frac{\partial X}{\partial L}=L^{-1/2}>0$ *et* $\frac{\partial^2 X}{\partial L^2}=-\frac{L^{-3/2}}{2}<0$: PmL décroissante.

- pour le capital $\frac{\partial X}{\partial K}=K^{-1/2}>0$ *et* $\frac{\partial^2 X}{\partial K^2}=-\frac{K^{-3/2}}{2}<0$: PmK décroissante

- Élasticités de la production par rapport aux quantités de facteurs

Les élasticités de la production par rapport aux quantités de facteurs mesurent la sensibilité de la production face à la variation de ce facteur, soit ici :

$$\varepsilon_{X/K} = \frac{\partial X / \partial K}{X/K} = \frac{\sqrt{K}}{2.\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)}$$

$$\varepsilon_{X/L} = \frac{\partial X / \partial L}{X/L} = \frac{\sqrt{L}}{2.\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)}$$

2/ Déterminez l'expression du taux marginal de substitution technique du capital au travail.

$TMST_{L \to K}$: nombre d'unités de capital qu'il faut intégrer au processus de production pour compenser la baisse de l'utilisation du travail sans faire varier le niveau de production.

$dX = \frac{\partial f}{\partial L}.dL + \frac{\partial f}{\partial K}.dK = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = -\frac{dK}{dL}$ = $TMST_{L \to K}$ i.e. que le TMST peut être défini à l'aide des productivités marginales des facteurs, qui ne sont que les dérivées partielles de *X*. Donc $TMST_{L \to K} = \frac{\frac{\partial X}{\partial L}}{\frac{\partial X}{\partial K}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$.

3/ Le producteur dispose d'un budget de 100 $ pour la production. Déterminez l'équation du sentier d'expansion ainsi que les demandes optimales du producteur en facteurs de production.

Programme de maximisation du producteur (maximisation de production sous contrainte de budget) :

$$\begin{aligned} &Max \quad X = 2.K^{1/2} + 2.L^{1/2} \\ &s.c. \quad C = w.L + r.K \end{aligned}$$

Lagrangien : $L = 2.K^{1/2} + 2.L^{1/2} - \lambda\left[w.L + r.K - C\right]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial K} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial L} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial K}(L,K) - \lambda.r = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial L}(L,K) - \lambda.w = 0 \\ w.L + r.K = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TMST_{L,K} = -\dfrac{dL}{dK} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial K}}{\frac{\partial f}{\partial L}} = \dfrac{r}{w} \\ w.L + r.K = C \end{cases}$$

Nous retrouvons ici un résultat fondamental : le producteur est à l'optimum lorsque le rapport des productivités marginales des facteurs est égal au rapport des prix des facteurs

$\dfrac{r}{w} = \dfrac{2.K^{-1/2}}{2.L^{-1/2}} = \left(\dfrac{L}{K}\right)^{1/2}$ soit $\boxed{K = L.\left(\dfrac{w}{r}\right)^2}$: il s'agit de l'équation du sentier d'expansion : lieu où le producteur maximise sa production sous sa contrainte de budget.

Dans CT = w.L + r.K: $\Leftrightarrow \begin{cases} K = L\left(\dfrac{w}{r}\right)^2 \\ w.L + r.K = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = \dfrac{C}{(r+w)}.\dfrac{w}{r} \\ L = \dfrac{C}{(r+w)}.\dfrac{r}{w} \end{cases}$

Pour un budget donné *C*, chaque coordonnée optimale est une fonction décroissante du prix du facteur dont elle dépend ; il s'agit donc des fonctions de demande en facteurs *L* et *K* du producteur.

4/ Calculez les demandes de facteur et la production associées à l'optimum lorsque C=58$, r=1$ et w=2 $.

K = (58/3)*2 = 116/3

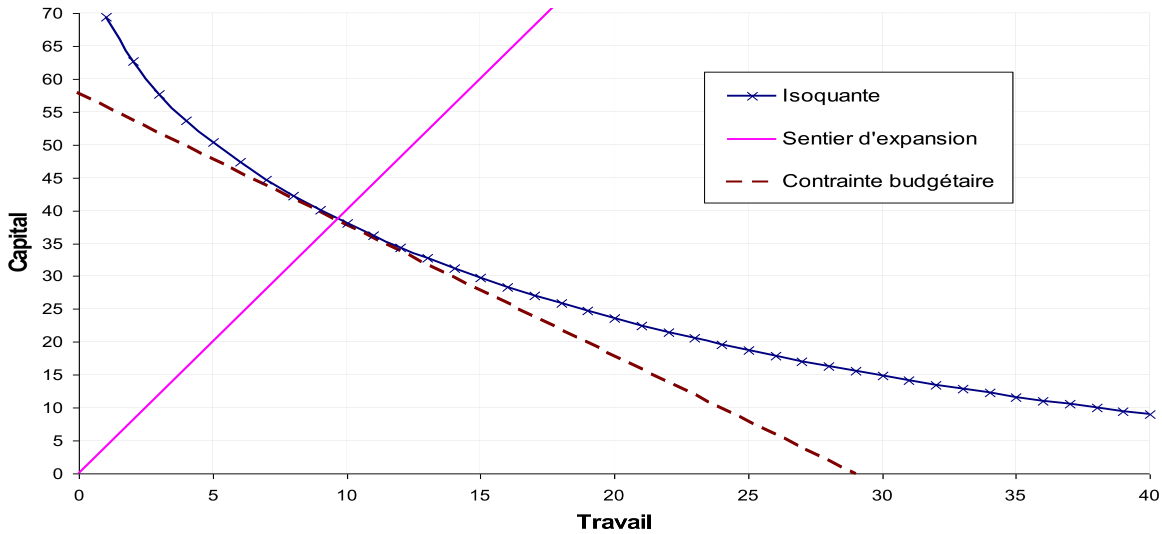
L = (58/3*(1/2) = 58/6 = 29/3

X = $2[(116/3)^{1/2}+(29/3)^{1/2}]$ = 18,65

5/ Faites la représentation associée à l'optimum précédent en y plaçant l'isoquante, le sentier d'expansion et la contrainte budgétaire. Vous aurez au préalable défini les équations de chacune de ces courbes.

Isoquante :	Sentier d'expansion :	Contrainte budgétaire :
$18,65 = 2(K^{1/2}+L^{1/2}) = 2K^{1/2}+2L^{1/2}$	$K = L.\left(\dfrac{w}{r}\right)^2$	C = wL + rK
$2K^{1/2} = 18,65-2L^{1/2}$	K = 4L	58 = 2L + K
$K=(9,33-L^{1/2})^2$		K = 58 – 2L

Représentation graphique:



Exercice2:

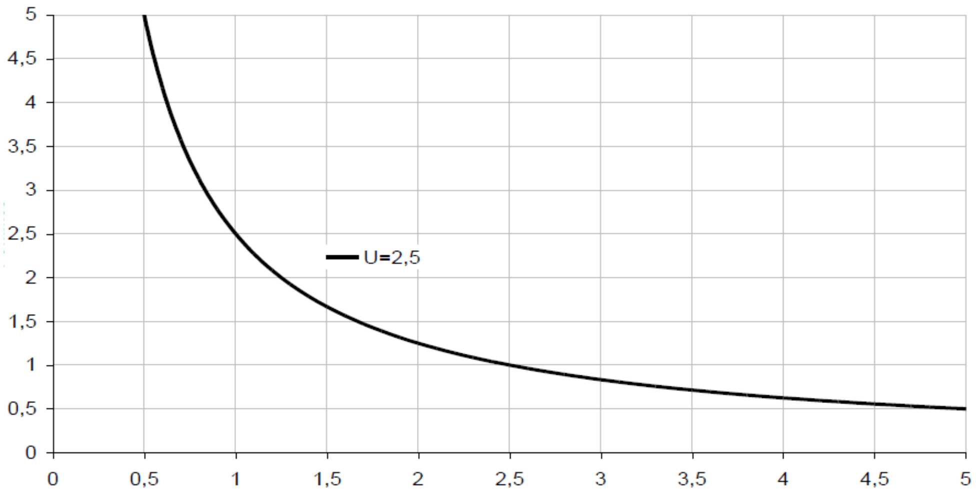
Supposons qu'il existe deux biens dans une économie : les mangues et les ignames. Supposons aussi que notre consommateur a une fonction d'utilité des deux biens de la forme décrite ci-dessous, où *x* désigne la quantité de ignames et *y* la quantité de mangues.

$$U = x.y$$

1-Dessinez une courbe d'indifférence définie par cette fonction d'utilité qui représente un niveau d'utilité de 2,5.

U=xy donc y=U/x

Pour un niveau d'utilité U=2,5 : y=2.5/x



2- Quel est le taux marginal de substitution entre les ignames et les mangues quand notre consommateur consomme 50 ignames et 50 mangues ? Quel est le taux marginal de substitution entre les deux biens, lorsque Georges consomme 100 ignames et 50 mangues ?

TMS = $U'_x / U'_y = y/x = p_x / p_y$

- si x=y=50
  TMS = y/x =1
- si x=100 et y=50
  TMS = 50/100 = ½

3- Si une unité d' ignames et une unité de mangues coûte chacune 1 dollar et que notre consommateur dépense 100 dollars, quel panier de mangues et d'ignames achètera-t-il ?

$p_x = p_y = 1$; R = 100

$R = p_x.X + p_y.Y$ donc $100 = x + y$

et TMS = $y/x = p_x / p_y = 1$ donc $y = x$

$$\begin{cases} 100 = x + y \\ y = x \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} y = 50 \\ x = 50 \end{cases}$$

4- Si le prix unitaire des ignames et des mangues est respectivement de 4 et 3 dollars, déterminez graphiquement et par le calcul quel panier d'ignames et de mangues notre consommateur achèterait avec son revenu de 100 dollars.

$p_x = 4$; $p_y = 3$

R = 100 = 4x +3y

$$\begin{cases} y/x = 4/3 \\ 100 = 4x + 3y \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} y = 50/3 \\ x = 12,5 \end{cases}$$

Questions (6 points)

1- Le PIB est-il un bon indicateur pour mesurer le développement économique ?

Le produit intérieur brut (PIB) est le principal agrégat mesurant l'activité économique. Il correspond à la somme des valeurs ajoutées brutes nouvellement créées par les unités productrices résidentes une année donnée, évaluées au prix du marché. Il donne une mesure des richesses nouvelles créées chaque année par le système productif et permet des comparaisons internationales. Le PIB est publié à prix courants et en volume aux prix de l'année précédente chaînés. Son évolution en volume (c'est-à-dire hors effet de prix) mesure la croissance économique. Pour ces raisons, il est un bon indicateur pour mesurer le développement économique d'un pays. Toutefois, cet indicateur comporte également des limites. Premièrement son mode de calcul n'évalue que partiellement la richesse produite. En effet, de nombreuses activités ne rentrent pas en compte dans le calcul du PIB du fait qu'elles ne font l'objet d'aucune transaction sur le marché et que l'on ne peut donc pas les évaluer en termes monétaires. Il s'agit principalement du travail domestique et du bénévolat. Deuxièmement, le calcul du PIB suit la logique de l'addition et non pas de la soustraction. Les produits polluants qui détériorent l'environnement, le tabagisme ou les accidents sont enregistrés au titre de l'augmentation globale des richesses. Le PIB ne prend donc pas en considération la détérioration du capital écologique et du capital humain. Il reste donc un indicateur quantitatif qui ne prend pas en compte les aspects qualitatifs de la croissance.

2- Qu'est-ce qu'un pays économiquement ouvert ?

Une économie ouverte est une économie pour laquelle le commerce international se fait librement et prend une part importante dans le produit intérieur brut du pays. Cette ouverture s'accompagne généralement de mesures de libéralisation économique. Avec la mondialisation économique, le taux d'ouverture des économies est de plus en plus grand. Il est mesuré par le rapport de la valeur des échanges extérieurs au PIB (X+M)/2/PIB. Tous les pays ne sont pas ouverts sur l'extérieur de manière égale. Généralement, les pays dont le marché intérieur est développé (États-Unis, Japon) ont un degré d'ouverture peu élevé. A l'inverse, certains pays comme la Chine sont très ouverts sur l'extérieur, son industrie produit surtout pour l'exportation. Tous les secteurs d'une économie ne sont pas ouverts au même degré sur le reste du monde. Dans chaque pays, il existe des secteurs abrités et des secteurs exposés à la concurrence mondiale.

3- Quels sont les principaux déterminants de l'épargne ?

L'épargne des ménages peut être définie comme la différence entre le revenu disponible et la consommation. La décision d'épargner résulte donc en premier lieu d'un arbitrage entre consommation et épargne. Selon l'hypothèse keynésienne, l'épargne augmente en fonction du revenu (hypothèse contredite par Kuznets d'un point de vue macroéconomique). Les auteurs classiques considèrent que la propension à épargner dépend du taux d'intérêt. Enfin l'environnement socioéconomique tel que l'inflation, le niveau d'emploi (chômage) peuvent agir sur les comportements d'épargne.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

CORRIGÉ de L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

La masse salariale pour chacune des catégories de salariés est donnée dans la colonne 4 du tableau ci-dessous :

	Nombre	Salaire moyen	Masse salariale
Ouvriers	55	13 800,00	759 000,00
Employés	18	17 400,00	313 200,00
Cadres	9	24 600,00	221 400,00
Cadres supérieurs	4	48 500,00	194 000,00
Total	86		1 487 600,00

Le salaire moyen est 1.487.600 / 86 = 17.297,67

Question 2

Pour répondre à la question, on calcule le salaire moyen dans l'entreprise B. C'est la masse salariale totale divisée par le nombre de salariés, soit 1.473.400 / 80 = 18.417,50

Cette moyenne étant supérieure au salaire moyen de l'entreprise A calculé à la question précédente, l'affirmation proposée est juste.

Question 3

Pour répondre à la question, on calcule le salaire moyen des salariés de l'entreprise B par catégorie (colonne 3 du tableau ci-dessous) et on le compare à celui de l'entreprise A.

	Nombre	Salaire moyen
Ouvriers	37	13 300,00
Employés	23	16 500,00
Cadres	14	23 700,00
Cadres supérieurs	6	45 000,00
Total	80	

Pour les 4 catégories de salariés, le salaire moyen obtenu pour l'entreprise B est inférieur à celui de l'entreprise A. L'affirmation proposée est juste.

Question 4

L'entreprise A offre de meilleurs salaires moyens par catégorie. Le fait que le salaire moyen de l'entreprise B est supérieur à celui de l'entreprise A tient à la structure catégorielle : plus de cadres, moins d'ouvriers.

Question 5

Par catégorie, l'écart entre les salaires moyens de l'entreprise A et ceux de l'entreprise B est donné par la formule (salaire moyen de l'entreprise B – salaire moyen de l'entreprise A) / salaire moyen de l'entreprise A. Les données sont dans le tableau ci-dessous :

Salaire moyen	Ent A	Ent B	Ecart B/A
Ouvriers	13 800,00	13 832,00	0,23 %
Employés	17 400,00	17 160,00	-1,38 %
Cadres	24 600,00	24 648,00	0,20 %
Cadres supérieurs	48 500,00	46 800,00	-3,51 %

L'augmentation réalisée en 2020 dans l'entreprise B conduit à réduire l'écart entre les deux entreprises. Les ouvriers et cadres ont désormais un salaire moyen supérieur dans l'entreprise B. Attention toutefois, il ne s'agit que d'une moyenne. Cela ne signifie pas que chaque ouvrier touche mieux dans l'entreprise B que dans l'entreprise A.

Question 6

52 salariés ont été augmentés sur les 80, soit une proportion de 65 % mais cette proportion n'est pas identique selon la catégorie. C'est ainsi que la part des cadres (cadres et cadres supérieurs) qui ont obtenu une augmentation est de 70 % (14 cadres ou cadres supérieurs sur 20) alors que cette proportion n'est que de 63,3 % (38/60) pour les salariés non cadres.

Commentaire : d'autres réponses sont possibles (test du Khi-2 par exemple)

Question 7

a) Moyenne = 4 %; Ecart type = 2,6 %

b) On peut réaliser 15 échantillons :

(X_1, X_2) ; (X_1, X_3) ; (X_1, X_4) ; (X_1, X_5) ; (X_1, X_6)

(X_2, X_3) ; (X_2, X_4) ; (X_2, X_5) ; (X_2, X_6)

(X_3, X_4) ; (X_3, X_5) ; (X_3, X_6)

(X_4, X_5) ; (X_4, X_6)

(X_5, X_6)

c) Les moyennes des (X_i, X_j) sont respectivement de 5 % ; 2 %; 6 % ; 3 % ; 4 % ; 3 % ; 7 % ; 4 % ; 5 % ; 4 % ; 1 % ; 2 % ; 5 % ; 6 % ; 3 %

Explicitation : le premier chiffre de 5 % correspond à la moyenne des augmentations obtenues par le couple (X_1, X_2). X_1 a obtenu une augmentation de 4 % et X_2 a obtenu une augmentation de 6 %

d) La moyenne obtenue des 15 chiffres précédents est de 4 %, soit une moyenne identique à celle calculée à la question 1. Il n'y a pas de réponse attendue quant à la justification de ce résultat.