ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

JUIN 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

La vie urbaine nous rend-elle plus solidaires ou plus solitaires ?

Sujet n° 2

La colère est-elle toujours condamnable ?

Sujet n° 3

La meilleure politique consiste-t-elle à chercher le consensus (l'accord de tous) ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

Juin 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque au choix du candidat.

Problème 1 :

On définit sur R_+^* l'application f_a qui à tout x réel strictement positif associe $f_a(x) = x^a e^{-x}$ où a est un paramètre réel.

1) Etudier les variations des fonctions f_0, f_2 et f_{-2} (dérivée première, dérivée seconde, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variations, …).
Donner la forme des graphes C_2 et C_{-2} des courbes représentatives de f_2 et f_{-2}. Etudier l'intersection des graphes C_2 et C_{-2}.

2) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
2a) Calculer les dérivées f'_a et f''_a et étudier leurs racines selon la valeur de a.
2b) Etudier les limites de f_a quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0, ainsi que la limite de f'_a quand x tend vers 0 ; par continuité la fonction f sera alors prolongée en 0.
2c) Construire le tableau des variations de la fonction f_a.

3) Dans cette question, on suppose que $a < 0$. Comme à la question précédente, étudier les variations de f_a.

4) Lorsque celui-ci existe, on note M_a (x_a, y_a) le point maximum de la courbe C_a représentant la fonction f_a pour a réel. Donner l'expression $y_a = g(x_a)$ du lieu géométrique parcouru par les points M_a lorsque a parcourt R.

Etudier les variations de la fonction g.

5) On considère l'intégrale $J(a) = \int_{R+} x^a e^{-x} dx$.
5a) Calculer J(0), J(2).
5b) Etablir une relation entre J(a) et J(a-1).
5c) Donner la valeur explicite de J(a) dans le cas où a est un nombre entier.

6) Pour $x > 0$, on définit l'intégrale $L(x) = \int_1^x f_a(t)\, dt$.
6a) Calculer L(1)
6b) On suppose que $x \geq 1$; proposer un minorant de L(x) c'est-à-dire une quantité m(x) telle que $L(x) \geq m(x)$ pour tout $x \geq 1$. En déduire la limite de L(x) quand $x \to +\infty$.

Problème 2 :
Ce problème décrit un algorithme permettant de construire des codes secrets chiffrés.

Introduction :

1) Pour x réel, calculer la somme $K(x) = x^2 + x^3 + \dots + x^n$.

2) En déduire l'expression de la somme $L(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$.

Enoncé :

On appelle S_n la séquence de chiffres obtenue en écrivant les uns après les autres les nombres strictement de n chiffres (le premier chiffre ne peut être nul, sinon il s'agit d'un nombre composé de n-1 chiffres).
Dans une séquence S_n, pour chaque chiffre x, $0 \leq x \leq 9$, on désigne par $N_n(x)$ le nombre d'occurrences de x dans la séquence. Par exemple, la séquence S_1 est : $S_1 = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$, et pour tout chiffre x = 0 à 9, $N_1(x) = 1$.

1) On écrit la séquence S_2 des nombres à deux chiffres, allant de 10 à 99 :
1a) Combien a-t-on écrit de chiffres au total ?
1b) Donner les valeurs de $N_2(x)$ pour x = 0 à 9.

2) Soit la séquence S_3 des nombres à trois chiffres, de 100 à 999.
2a) Combien a-t-on écrit de chiffres au total ?
2b) Donner les valeurs de $N_3(x)$ pour x = 0 à 9.

3) On considère maintenant la séquence S_4 des nombres à quatre chiffres, de 1000 à 9999, et on s'intéresse au seul chiffre x = 1.
3a) Combien S_4 comporte-t-elle de chiffres ?
3b) Donner la valeur de $N_4(1)$.

4) On définit la suite de chiffres notée T_n et définie comme étant la juxtaposition des séquences $S_1, S_2, \dots, S_n$; par exemple, T_3 est la suite des chiffres constituée à partir des séquences S_1, S_2, S_3, donc composée de tous les nombres allant de 0 à 999.
Pour chaque chiffre x, x = 0 à 9, on note par $M_n(x)$ le nombre d'occurrences de x dans la suite T_n.

4a) Combien de chiffres au total comportent les suites T_2 et T_3 ?
4b) Donner, pour chaque entier x, x = 0 à 9, les nombres de fois $M_2(x)$ et $M_3(x)$ où x apparaît dans T_2 et T_3.
4c) Combien de chiffres au total comporte la suite T_4 ?
4d) Quelle est la valeur de $M_4(1)$?

5) On se place dans le cas général d'une séquence S_n et d'une suite T_n (telle que définie à la question 4), n étant un entier quelconque, $n > 1$.
5a) Combien de chiffres, notés respectivement A(n) et B(n), comportent la séquence S_n et la suite T_n ?
5b) Trouver une relation entre $M_n(1)$, $M_{n-1}(1)$ et $N_n(1)$.
5c) Trouver une relation entre $N_n(1)$ et $M_{n-1}(1)$.
5d) Montrer que $M_n(1)$ est une suite récurrente d'ordre 1 de la forme

$$M_n(1) = u + vM_{n-1}(1)$$

où u et v peuvent dépendre de n ; quelles sont les valeurs de u et v ?
5e) En déduire les expressions de $M_n(1)$ et $N_n(1)$ en fonction de n.

6) Pour constituer un code secret abc à 3 chiffres, on passe par deux étapes :
- la première étape consiste à utiliser un générateur de trois nombres aléatoires, notés x, y et z ;
- la deuxième étape est la fabrication du code secret abc composé des chiffres situés immédiatement après les $x^{\text{ème}}$, $y^{\text{ème}}$ et $z^{\text{ème}}$ chiffres 1 apparus dans une suite de type T.
La mise en œuvre de la première étape a conduit à x = 15, y = 82 et z = 1598.
Quel est le code secret abc correspondant à ce tirage ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

JUIN 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Après avoir analysé les principaux déterminants de l'accroissement des inégalités économiques et territoriales au plan mondial, vous vous interrogerez pour savoir dans quelle mesure la croissance des inégalités sociales est préjudiciable pour les économies des pays de l'ouest africain ?

Sujet 2

Après avoir rappelé les principales théories relatives au développement du commerce international, vous analyserez de façon critique le commentaire suivant de la Banque mondiale en 2019 :
« Les pays en développement se heurtent fréquemment à des obstacles indirects qui entravent leur accès aux marchés mondiaux : pratiques anticoncurrentielles, réglementations pesant sur l'investissement et la croissance des entreprises ou infrastructures inadaptées. Même les pays qui appliquent une politique commerciale libérale et transparente rencontrent des difficultés si leurs marchés ne sont pas suffisamment intégrés. En outre, bon nombre des personnes les plus pauvres de la planète vivent dans des régions enclavées, isolées ou sans voie d'accès aux échanges internationaux. Le Groupe de la Banque mondiale aide ses pays clients à surmonter ces obstacles afin d'améliorer leur accès aux marchés des pays développés et d'accroître leur participation à l'économie mondiale ».

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

Juin 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1 :

1) Donner une primitive, sur son domaine de définition (que l'on ne demande pas de préciser), de la fonction f définie par f : $x \to f(x) = (x^2 - 1) / (x^3 - 3x + 1)^2$.

2) Calculer l'intégrale B définie par : $B = \int_0^{\sqrt{\pi}} x.\sin(x^2)\,dx$

Exercice 2 :

Soit M la matrice carrée :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 (avec $\lambda_1 < \lambda_2$) et des vecteurs propres v_1 et v_2 associés de la matrice M.

2) On note par Δ la matrice diagonale formée par les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.
On rappelle qu'une matrice régulière est appelée également matrice inversible.
Donner l'expression d'une matrice régulière P telle que $M = P\,\Delta\,P^{-1}$.

3) Calculer la matrice M^n, pour n entier positif ou nul.

4) On considère la suite u(n), n entier positif ou nul, récurrente d'ordre 2 définie par :
$u(n+1) = 5u(n) - 6u(n-1)$, avec $u(0) = u(1) = 1$

On note V_n le vecteur colonne défini par : $V_n = \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix}$

Trouver une relation entre V_n, V_{n-1} et M.

5) Donner l'expression du terme général u(n) en fonction de n.

6) Calculer $\lim_{n \to +\infty} u(n)$.

Exercice 3 :

On considère une expérience aléatoire E dont l'un des résultats possibles est un événement noté A de probabilité p, $0 < p < 1$; on posera $1 - p = q$.
On réalise une suite d'expériences E à l'identique et indépendamment les unes des autres, et on définit la variable aléatoire N comme étant le rang de la première expérience dont le résultat est l'événement A.

1) Donner la loi de la variable N, c'est-à-dire l'expression de la probabilité $P(N = n)$ en fonction de p, q et de l'entier n ($n > 0$).

2) Calculer l'espérance mathématique E(N) de la variable N.

3) Calculer la variance V(N) de la variable N.

4) Calculer la probabilité que N soit un nombre entier pair.

5) On rappelle que si A et B sont deux événements, la probabilité conditionnelle de A/B, c'est-à-dire que A se réalise sachant que b est réalisé, est $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$.
Calculer $P(N = 2/ N \text{ pair})$ la probabilité que $N = 2$ sachant que N est pair.

Exercice 4 :

On considère le polynôme P, de degré 3, de la forme $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$, avec a et b réels.
On suppose que P vérifie la relation T :

$$(T) \qquad \forall x \in R, P(x + 1) - P(x) = 3x^2$$

1) Calculer P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(-1), P(- 2).

2) Calculer les coefficients a et b.

3) Existe-t-il un polynôme de la forme $x^3 + ax^2 + bx$, a et b réels, vérifiant la relation (T) ?

Exercice 5 :

1) Soit ab un nombre de deux chiffres, compris entre 00 et 99, écrit dans le classique système décimal ; $0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$. Par convention, les chiffres 0, 1, 2, …, 9 seront écrits avec deux chiffres : 00, 01, 02, …, 09.

On définit le nombre D égal à la valeur absolue de la différence entre ab et ba, c'est-à-dire que $D = |ab - ba|$.

Montrer que, quel que soit le nombre ab, D est divisible par 9.

2) Soit abc un nombre de trois chiffres, compris entre 000 et 999 ; $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, et $0 \leq c \leq 9$.

Quels sont les diviseurs des nombres $E = |abc - cba|$ et $F = |abc - bac|$?