ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

JUIN 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

On note $\mathbb{R}$, le corps des nombres réels. On note $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ avec a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $x \in [a, b]$ et tout réel $r > 0$, on note $B(x, r) = \{y \in [a, b] : |y - x| < r\}$ la boule ouverte centrée en x de rayon r, intersectée avec l'ensemble $[a, b]$.

Partie 1.1

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Soit $x \in [a, b]$, on pose

$$E_x = \{y \in [a, b] : f(y) \leq f(x)\}$$

l'ensemble des réels $y \in [a, b]$ tels que l'image par f est inférieure à $f(x)$. Montrer que

$$E_x = f^{-1}(] - \infty, f(x)])$$

c'est-à-dire que E_x est l'image réciproque de $] - \infty, f(x)]$ par la fonction f. Soit $y \in E_x$, alors $f(y) \leq f(x)$ donc $f(y) \in] - \infty, f(x)]$ donc $y \in f^{-1}(] - \infty, f(x)])$. Réciproquement si $y \in f^{-1}(] - \infty, f(x)])$ alors $f(y) \in] - \infty, f(x)]$ donc $f(y) \leq f(x)$ et $y \in E_x$.

2. Montrer que E_x est une partie fermée de $[a, b]$. C'est l'image réciproque d'une partie fermée par une fonction continue.
3. En déduire que E_x est une partie compacte. C'est une partie fermée de $[a, b]$ qui est une partie compacte, donc c'est une partie compacte.

4. Soient x et $y \in [a,b]$. Montrer que si $E_x = E_y$ alors $f(x) = f(y)$. On a $x \in E_x = E_y$ donc $f(x) \leq f(y)$. Et $y \in E_y = E_x$ donc $f(y) \leq f(x)$.
5. On construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $E_{x_n} \subset E_{x_{n+1}}$. Montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \in E_{x_n}$ par définition, et $x_n \in \mathbb{E}_{x_{n+1}}$ par hypothèse. Donc $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$, ce qui montre la croissance de la suite.
6. On pose $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ la borne supérieure de f. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on a $E_x \subset f^{-1}(]-\infty, M])$. La borne M n'est pas $+\infty$, car f est bornée car continue sur un compact. Soit $x \in [a,b]$, alors pour tout $y \in E_x$, $f(y) \leq f(x) \leq M$ donc $y \in f^{-1}(]-\infty, M])$, ce qui conclut la démonstration.
7. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose

$$V_x^\varepsilon(f) = \{y \in [a,b] : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$$

l'ensemble des réels $y \in [a,b]$ tels que l'image par f est proche de $f(x)$ à ε près. Montrer que

$$V_x^\varepsilon(f) = f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[).$$

Soit $y \in V_x^\varepsilon(f)$, alors par définition de la valeur absolue $f(y) < \varepsilon + f(x)$ et $f(y) > f(x) - \varepsilon$, ce qui conclut la démonstration par équivalence.
8. Montrer que $V_x^\varepsilon(f)$ est une partie ouverte de $[a,b]$. $V_x^\varepsilon(f)$ est l'image réciproque d'une partie ouverte par une fonction continue, donc c'est une partie ouverte.
9. Construire une fonction $h \in \mathcal{C}^0$ telle qu'il existe $x^* \in [a,b]$ avec $V_{x^*}^\varepsilon(h)$ qui n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$. On pose h la fonction constante égale à 7 sur $[a,b] = [0,1]$ alors pour $x^* = 0.33$ (par exemple, mais tout autre point fonctionne) $V_{0.33}^\varepsilon(h) = \{y \in [0,1] : |h(y) - 7| < \varepsilon\} = \{y \in [0,1] : |7 - 7| < \varepsilon\}$ donc $V_{x^*}^\varepsilon(h) = [0,1]$ qui n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$.
10. Soit g une fonction définie sur $[a,b]$ qui vérifie la propriété suivante :

Propriété (P). *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$*

$$y \in B(x,r) \Longrightarrow y \in V_x^\varepsilon(g).$$

Montrer que la fonction g est continue. Soit g une fonction qui vérifie la propriété (P). Soit $\epsilon > 0$, et $x_0 \in [a,b]$. Pour montrer que g est continue au point x_0, il faut montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $y \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap [a,b]$, on ait $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$. Or si $y \in B(x_0, r)$ avec le réel r donné par la propriété alors $y \in V_{x_0}^\varepsilon(g)$ donc $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$, et la fonction g est donc continue.
11. Soit f une fonction dérivable telle que $f' \in \mathcal{C}^0$. Montrer qu'elle vérifie la propriété (P). Par théorème des accroissements, $|f(x) - f(y)| \leq \sup\limits_{z\in[a,b]} |f'(z)|\ |x - y|$. Si f' est identiquement nulle, la fonction f est constante et vérifie évidemment la propriété (P) car $V_x^\varepsilon(f) = [a,b]$ pour tout x et ε, donc tout réel $r > 0$ convient. Sinon, pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $r = \dfrac{\varepsilon}{\sup_{z\in[a,b]} |f'(z)|}$, et $|x - y| < r$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
12. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. On suppose que f ne vérifie pas la propriété (P) pour un réel $\varepsilon > 0$ fixé. Construire deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]$ telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - y_n| < (b-a)2^{-n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Si f ne vérifie pas la propriété (P), cela veut dire que pour tout réel $r > 0$, et en particulier pour $r = (b-a)2^{-n}$, il existe $(x,y) \in [a,b]^2$ tels que $y \in B(x,r)$ et $y \notin V_x^{\varepsilon}(f)$, donc $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. En particulier pour $r = (b-a)2^{-n}$, on a les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voulues.

13. Soit f une fonction de $\mathcal{C}^0$. Montrer que f vérifie la propriété (P).
Supposons que f ne vérifie pas la propriété (P) pour un $\varepsilon > 0$ quelconque. Par propriété de Bolzano-Weierstrass, dans la partie compacte $[a,b]$, les deux suites admettent des suites extraites convergentes. Par l'inégalité $|x_n - y_n| < (b-a)2^{-n}$, on conclut que les suites extraites convergent vers une limite commune ℓ. Par continuité, les suites $(f(x_{\phi(n)}))$ et $(f(y_{\phi(n)}))$ convergent toutes deux vers $f(\ell)$, ce qui est une contradiction avec $|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| \geq \epsilon$ pour tout n. Donc f vérifie forcément la propriété (P).

Partie 1.2

14. Rappeler la formule des coefficients de Newton $(C_n^k)_{0\leq k\leq n, n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tous réels x et y et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a l'identité

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

C'est la formule du binôme de Newton. On pose $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$.

15. Montrer que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k (z-a)^k (b-z)^{n-k} = n(z-a)(b-a)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kC_n^k (z-a)^k (b-z)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}(z-a)^k(b-z)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}(z-a)^k(b-z)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}(z-a)^{k+1}(b-z)^{n-1-k} \\
&= n(z-a)(b-a)^{n-1}
\end{aligned}$$

16. Montrer que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k (z-a)^k (b-z)^{n-k} = n(n-1)(z-a)^2(b-a)^{n-2}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}(z-a)^k(b-z)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2}(z-a)^k(b-z)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k}(z-a)^{k+2}(b-z)^{n-2-k} \\
&= n(n-1)(z-a)^2(b-a)^{n-2}
\end{aligned}$$

17. Montrer que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n+1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\dots(k-p+1)C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} = n(n-1)\dots(n-p+1)(z-a)^p(b-a)^{n-p}.$$

Avec la première question pour $(x+y)^n$, en dérivant p fois par rapport à x :

$$\begin{aligned}
\frac{d^p}{dx^p}(x+y)^n &= n(n-1)\dots(n-p+1)(x+y)^{n-p} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1)\dots(k-p+1)x^{k-p}y^{n-k}.
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $y = b-z$ et $x = z-a$ et de multiplier le tout par $(z-a)^p$. On peut aussi faire un calcul direct, ou faire une démonstration par récurrence.

18. Montrer que

$$(k(b-a)-n(z-a))^2 = (b-a)^2(k(k-1)) + (b-a)^2k - 2n(b-a)(z-a)k + n^2(z-a)^2.$$

On développe le membre de gauche par une identité remarquable, et on simplifie les deux premiers termes du membre de droite.

19. En déduire que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(k(b-a)-n(z-a))^2C_n^k(z-a)^k(b-z)^{n-k} = n(z-a)(b-z)(b-a)^n.$$

On a $(k(b-a)-n(z-a))^2 = (b-a)^2[k(k-1)]+(b-a)^2[k]-2n(b-a)(z-a)[k]+n^2(z-a)^2$. Donc avec les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
= \; & n(n-1)(z-a)^2(b-a)^n + (b-a)^2n(z-a)(b-a)^{n-1} \\
& -2n(b-a)n(z-a)^2(b-a)^{n-1} + n^2(z-a)^2(b-a)^n \\
= \; & (z-a)(b-a)^n(nn(z-a) - n(z-a) + (b-a)n - 2nn(z-a) + nn(z-a)) \\
= \; & (z-a)(b-a)^n(-n(z-a)+(b-a)n) \\
= \; & (z-a)(b-a)^n n(b-z)
\end{aligned}$$

20. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r > 0$, pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ vérifiant $\left|a + \frac{k}{n}(b-a) - z\right| \geq r$, on a

$$\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leq C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r^2}.$$

On pose $C = 2\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Puisque $\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r^2} \geq 1$, on a

$$\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leq C \leq C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r^2}$$

21. Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ on a

$$\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leq \varepsilon + C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r^2}.$$

On prend le r donné par la partie 1.1. Soit $z \in [a,b]$, alors on a deux possibilités :
Le cas $\left|z - a + \frac{k}{n}(b-a)\right| < r$, qui implique $\left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leq \varepsilon$.
Le cas $\left|z - a + \frac{k}{n}(b-a)\right| \geq r$, qui se traite par la question précédente.

22. En déduire qu'il existe une constante $D > 0$ ne dépendant que de la fonction f telle que pour tout $z \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n}\right| \quad \leq \quad \varepsilon + \frac{D}{nr^2}.$$

On fait apparaître $\frac{(b-z+z-a)^n}{(b-a)^n}$ devant $f(z)$ et on développe le numérateur par la formule de Newton pour obtenir une somme

$$\sum_{k=0}^{n} \left|f(z) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

On utilise la majoration de la question 20 en deux termes. Pour le premier terme en ε, on rassemble la somme par la formule de Newton, ce qui donne le terme ε. Pour le deuxième terme $C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r^2}$, on utilise la question 18 qui donne la majoration

$$\sum_{k=0}^{n} C\frac{(na + k(b-a) - nz)^2}{n^2r^2} C_n^k \frac{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}{(b-a)^n} \leq \frac{C}{n^2r^2} n(z-a)(b-z)$$

et on obtient une majoration uniforme en remarquant que $(z-a)(b-z) \leq (b-a)^2$. Il suffit donc de poser $D = C(b-a)^2 = 2\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|(b-a)^2$.

2 Problème d'algèbre

Soit V un endomorphisme sur l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$. Les compositions successives de l'endomorphisme V seront notées V^m pour tout $m \in \mathbb{N}$, avec la convention V^0 étant l'endomorphisme identité.

Partie 2.1

On pose V l'endomorphisme suivant

$$\begin{array}{rcl} V : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2}P\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{X+1}{2}\right). \end{array}$$

1. Montrer que pour tout polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$, $V(P)$ est également un polynôme de degré au plus $n \in \mathbb{N}$. Par translation/dilatation, on reste un polynôme et le degré n'est pas modifié, et par combinaison linéaire, le degré ne peut que diminuer.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note V_n l'application

$$\begin{array}{rcl} V_n : \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2}P\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{X+1}{2}\right) \end{array}$$

   définie sur le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus $n \in \mathbb{N}$. Montrer que V_n est bien un endomorphisme. $V_n(\lambda P + Q) = \lambda V_n(P) + V_n(Q)$.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $v_{n,m} := \dim(\text{Ker } V_n^m) + \text{rang}(V_n^m)/2$ pour $m \in \mathbb{N}$ est croissante. Par théorème du rang, quelque soit $m \in \mathbb{N}$, on a $\dim(\text{Ker } V_n^m) + \mathrm{rang(V_n^m) = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1}$. Donc $\dim(\text{Ker } V_n^m) + \mathrm{rang(V_n^m)/2 = n + 1 - rang(V_n^m)/2}$. Soit $Q \in \text{Im } V_n^{m+1}$ alors il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $V_n^{m+1}(P) = Q = V_n^m(V_n(P))$. Donc $Q \in \text{Im } V_n^m$ et $\text{Im } V_n^{m+1} \subset \text{Im } V_n^m$. Donc $\mathrm{rang(V_n^m)}$ est une suite décroissante.
   La suite $v_{n,m}$ est donc croissante.
4. Montrer que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge quand $m \to +\infty$. La suite est majorée par $n+1$, donc elle converge.
5. Donner la matrice M de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui représente l'endomorphisme V_2 dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   $V_2(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $V_2(X) = \frac{X}{4} + \frac{1}{2}\frac{X+1}{2} = \frac{2X+1}{4}$ et

$$V_2(X^2) = \frac{1}{2}\frac{X^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{(X+1)^2}{4} = \frac{2X^2+2X+1}{8}.$$

   D'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

6. En déduire Ker V_2 et Im V_2.
   La matrice est de rang 3 donc $\text{Im } V_2 = \mathbb{R}_2[X]$ et $\text{Ker } V_2 = \{0\}$.

Partie 2.2

A partir de cette question, et jusqu'à la fin du problème, on fixe $n = 2$. On cherche à étudier la limite d'endomorphisme V_2^m pour $m \to +\infty$.

7. Calculer la limite de $v_{2,m}$ quand $m \to +\infty$. Puisque le rang de la matrice est 3, alors il ne diminue pas avec les compositions. Donc $v_{2,m} = 0 + 3/2 = 3/2$ est une suite constante de limite $3/2$.
8. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ qui diagonalise l'endomorphisme V_2. La matrice possède un polynôme caractéristique scindé à racines simples réelles, donc elle est diagonalisable.
9. Calculer les valeurs propres de l'endomorphisme V_2 et les vecteurs propres associés. 1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1. De plus $V_2(1-2X) = 1 - X - 1/2 = (1-2X)/2$ donc est vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$. Et

$$\begin{aligned} V_2\left(\frac{1}{6} - X + X^2\right) &= \frac{1}{6} - \frac{X}{2} - \frac{1}{4} + \frac{2X^2 + 2X + 1}{8} \\ &= \frac{4 - 12X - 6 + 6X^2 + 6X + 3}{24} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} - X + X^2\right), \end{aligned}$$

d'où le dernier vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{4}$.

10. Calculer la matrice de passage $\mathcal{P}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Avec la base trouvée en question 8, qui diagonalise V_2, on a

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/6 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Calculer l'inverse de la matrice $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Donner la matrice Δ de V_2 dans la base $\mathcal{C}$. A permutation près des coefficients diagonaux, on obtient

$$\Delta = \mathcal{P}^{-1} M \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

13. Soit $Q = cX^2 + bX + a$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{C}$. Par la matrice $\mathcal{P}^{-1}$ on obtient

$$Q = \frac{6a + 3b + 2c}{6} - \frac{b+c}{2}(1 - 2X) + c\left(\frac{1}{6} - X + X^2\right)$$

14. Calculer la matrice qui représente l'endomorphisme V_2^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ dans la base canonique.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/6 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^m & 0 \\ 0 & 0 & 1/4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2^m & 1/(6\cdot 4^m) \\ 0 & -1/2^{m-1} & -1/4^m \\ 0 & 0 & 1/4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 1/2^{m+1} & 1/3 - 1/2^{m+1} + 1/(6\cdot 4^m) \\ 0 & 1/2^m & 1/2^m - 1/4^m \\ 0 & 0 & 1/4^m \end{pmatrix}.$$

15. Montrer que les coordonnées de $V_2^m(Q)$ dans la base $\mathcal{C}$ convergent. On peut passer à la limite dans la matrice précédente, pour obtenir $\lim\limits_{m\to+\infty} V_2^m(Q) = a + b/2 + c/3$ en tant que polynôme, ce qui correspond à la convergence des coordonnées.
16. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. On note $|||\cdot|||$ la norme d'endomorphisme associée, c'est-à-dire que pour tout endomorphisme V on définit

$$|||V||| := \max_{Q\in\mathbb{R}_2[X], Q\neq 0} \frac{\|V(Q)\|}{\|Q\|}.$$

Montrer que $|||V_2||| \geq 1$. Si Q est un vecteur propre (non nul) de V_2 alors $V_2(Q) = \lambda Q$ avec $\lambda \in \{1, 1/2, 1/4\}$. Donc $\dfrac{\|V_2(Q)\|}{\|Q\|} = \lambda$ et $|||V_2||| \geq \max\{1, 1/2, 1/4\} = 1$.
17. Montrer qu'il existe un endomorphisme U de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$\|V_2^m(Q) - U(Q)\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On pose U l'endomorphisme tel que $U(a + bX + cX^2) = a + b/2 + c/3$ alors

$$\|V_2^m(Q) - U(Q)\| \leq \| - b/2^{m+1} - c/2^{m+1} + c/(6\cdot 4^m)\| + \|P\|/2^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

où le polynôme P est explicite, mais dont la décomposition est inutile pour conclure.
18. Donner la matrice de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui représente l'endomorphisme U dans la base $\mathcal{C}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Calculer le rang de la matrice qui représente l'endomorphisme U dans la base $\mathcal{C}$. Le rang est 1.
20. En déduire si la suite $v_{2,m} = \dim(\mathrm{Ker}\ V_2^m) + \mathrm{rang}(V_2^m)/2$ converge ou non vers $\dim(\mathrm{Ker}\ U) +$ rang(U)/2. La suite $v_{2,m}$ est constante égale à $3/2$, et $\dim(\mathrm{Ker}\ U) + \mathrm{rang}(U)/2 = 5/2$. Donc elle ne converge pas, même si $V_2^m(Q) \to U(Q)$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

JUIN 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R ***l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.***

Exercice n° 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in R^2$

1. Etudier la diagonalisation de A (on précisera les valeurs propres et les sous espaces propres associés).

La matrice étant symétrique, elle est diagonalisable.

On obtient : $\det(A - \lambda I) = (a + 2b - \lambda)(a - b - \lambda)^2$.

Pour $b \neq 0$

$\lambda = a - b$ est une valeur propre double, dont le sous espace propre associé est le plan d'équation : $x + y + z = 0$.

$\lambda = a + 2b$ a pour vecteur propre associé (1,1,1).

Pour b=0, $A = a^3 I$

2. On suppose que $a \neq 0; b \neq 0$, calculer A^n pour $n \in N$.

La matrice A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$ et $A^n = P D^n P^{-1}$, avec

$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$, où

$$\begin{cases} a_n = 2(a-b)^n + (a+2b)^n \\ b_n = (a+2b)^n - (a-b)^n \end{cases}$$

3. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel d'équation : $x+y+z=0$.

Cette matrice s'écrit : $M = X\,(X^{'}\,X)^{-1}X^{'}$, où $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On obtient alors :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au sous espace vectoriel d'équation : $x+y+z=0$.

La matrice de la symétrie est : $S = 2M - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n° 2

Soit $f : R^4 \to R^4$ définie par : $f\,(x,y,z,t) = (\alpha\, x + y, x + \alpha y, z+t, z+t)$, où α est un paramètre réel non nul.

1. Déterminer le noyau et l'image de *f* selon les valeurs de α .

La matrice associée à cette application linéaire est : $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour le noyau de *f* on doit avoir : $\alpha\, x + y = 0;\ x + \alpha\, y = 0; z+t = 0$.

Si $\alpha \neq \pm 1$, $Ker\ f = \{0,0,z,-z\}$, dim $(Ker\ f) = 1 \Rightarrow$ dim $(\mathrm{Im}\, f) = 3$ et $\mathrm{Im}\, f = \{X,Y,Z,Z\}$

Si $\alpha = 1$, $Ker\ f = \{x,-x,z,-z\}$, dim $(Ker\ f) = 2 \Rightarrow$ dim $(\mathrm{Im}\, f) = 2$ et $\mathrm{Im}\, f = \{X,-X,Z,Z\}$

Si $\alpha = -1$, $Ker\ f = \{x,x,z,-z\}$, dim $(Ker\ f) = 2 \Rightarrow$ dim $(\mathrm{Im}\, f) = 2$ et $\mathrm{Im}\, f = \{X,X,Z,Z\}$

2. Etudier la diagonalisation de la matrice associée à *f* selon les valeurs de α (on précisera les valeurs propres).

On a : $\det(M - \lambda I) = \lambda(\lambda-2)(\alpha-\lambda-1)(\alpha-\lambda+1)$, les valeurs propres sont : $0, 2, \alpha+1, \alpha-1$.

La diagonalisation va dépendre des multiplicités de ces valeurs propres :

$$\begin{cases} \alpha \pm 1 = 0 \\ \alpha \pm 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1,1 \\ \alpha = 1,3 \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, $\lambda = 0$ est une valeur propre double ainsi que $\lambda = 2$ et les sous espaces vectoriels propres sont de dimension 2. La matrice est donc diagonalisable.
Si $\alpha = -1$, $\lambda = 0$ est une valeur propre double et les deux autres -2 et 0 et le sous espace vectoriel propre pour 0 est de dimension 2. La matrice est donc diagonalisable.
Si $\alpha = 3$, $\lambda = 2$ est une valeur propre double et les deux autres sont 0 et 4 et le sous espace vectoriel propre associé à 2 est de dimension 2. La matrice est donc diagonalisable.
Dans tous les autres cas, les 4 valeurs propres sont distinctes, donc la matrice est, dans tous les cas, diagonalisable.

Exercice n° 3

Soient *a* et *b* deux entiers strictement positifs. On considère le polynôme P_n défini par :

$P_n(x) = \dfrac{x^n (bx-a)^n}{n!}$, où $n \in N$.

1. Montrer que le polynôme P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières pour *x*=0 et $x = a/b$

On développe ce polynôme par la formule du binôme d'une part et par la formule de Mac Laurin d'autre part pour obtenir :

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \dfrac{C_n^k}{n!} b^k a^{n-k} x^{n+k} = \sum_h \dfrac{P_n^{(h)}(0)}{h!} x^h$. On en déduit :

$P_n^{(h)}(0) = 0$ si $h < n$ ou $h > 2n$ et

$P_n^{n+k}(0) = (-1)^{n-k} (n+k)! \dfrac{C_n^k}{n!} b^k a^{n-k}$ si $h = n+k$ $(k = 0,...n)$

Chaque terme étant un entier, $P_n^{n+k}(0)$ est un entier.

Pour $x = \dfrac{a}{b}$, on pose $u = x - \dfrac{a}{b}$, il vient :

$P_n(x) = (\dfrac{a}{b} + u)^n \dfrac{b^n u^n}{n!} = \dfrac{u^n (a+bu)^n}{n!} = Q_n(u)$

Les dérivées de $Q_n(u)$ sont des entiers en zéro et sont égales aux dérivées de $P_n(x)$ en $x = \dfrac{a}{b}$, car le développement de Taylor de P_n en a/b est le développement de Mac Laurin pour Q_n

2. Etudier la convergence de la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)\,dx$

Posons $M = \underset{0 \le x \le \pi}{Sup} |x(bx-a)|$, alors $|I_n| \le \int_0^{\pi} |P_n(x)\sin(x)|\,dx \le \int_0^{\pi} |P_n(x)|\,dx \le \int_0^{\pi} \dfrac{M^n}{n!}\,dx = \pi \dfrac{M^n}{n!}$

Donc la limite de (I_n) est nulle.

3. Montrer que si π était un nombre rationnel et si on prenait *a* et *b* des entiers tels que $a/b = \pi$, le nombre I_n serait un entier non nul, en contradiction avec le résultat de la question précédente.

Pour tout $x \in [0,\pi]$, on a : $x(bx-a) \geq 0$, donc $x^n (bx-a)^n \sin x \geq 0$.
Par ailleurs $x \in [\pi/4, 3\pi/4]$, $x^n (bx-a)^n \sin x \geq (\pi/4)^n b^n (\pi/4)^n (\sqrt{2}/2)$

Par conséquent : $I_n \geq \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\frac{b}{4}\right)^n \frac{\sqrt{2}}{2} dx > 0$

Donc on trouve que I_n est un entier (question 1) strictement positif, ce qui est contraire au résultat de la question 2.

Exercice n° 4

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{Lnt}{t^2-1} dt$

1. Montrer que *I* est convergente.

La fonction $\dfrac{Lnt}{t^2-1}$ est continue sur $]0,1[$. En 1, $\dfrac{Lnt}{t^2-1} \approx \dfrac{t-1}{(t-1)'t+1)} \approx \dfrac{1}{t+1} \to 1/2$.

En 0, $\dfrac{Lnt}{t^2-1} \approx -Lnt$ dont l'intégrale est convergente au voisinage de 0.

2. Pour tout entier naturel *k*, calculer $J_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \, Lnt \, dt$

L'intégrale est bien convergente et on intègre par parties :

$$J_k = \left[\frac{t^{k+1} Lnt}{k+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^k}{1+k} dt = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

3. Montrer que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = I - \int_0^1 \frac{t^{2n+2} Lnt}{t^2-1} dt$$

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\sum_{k=0}^{n} J_{2k} = -\sum_0^n \int_0^1 t^{2k} \, Lnt \, dt = -\int_0^1 \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} Lnt \, dt$

4. Montrer que l'on peut prolonger par continuité en 0 et 1, la fonction $t \to \dfrac{t^2 \, Lnt}{t^2-1}$

La fonction se prolonge par continuité par 0 en 0, et par ½ en 1.

5. Montrer qu'il existe une constante *M*>0, tel que : $\forall t \in]0,1[, \left|\dfrac{t^2 \, Lnt}{t^2-1}\right| \leq M$

Toute fonction continue sur un compact est borné.

6. En déduire que : $I = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\,Lnt}{t^2-1}\,dt\right| \le \int_0^1 t^{2n}\left|\frac{t^2\,Lnt}{t^2-1}\right| dt \le M\int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{M}{2n+1} \to 0$$

Evident avec les questions 3 et 6.

Exercice n° 5

Soient les fonctions réelles f_1 et f_2 définies respectivement par : $f_1(x) = \dfrac{x+2}{2-x}$ et $f_2(x) = \dfrac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$

1. Etudier les variations de ces deux fonctions et donner l'allure de leurs graphes dans un même repère.

La fonction f_1 est une hyperbole équilatère qui admet comme asymptotes les droites d'équation x=2 et y=-1.

La fonction f_2 admet pour dérivée : $f_2'(x) = \dfrac{-12(x^2-12)}{(12-6x+x^2)^2}$.

Cette fonction est décroissante de $\left]-\infty, -2\sqrt{3}\right]$, croissante sur $\left[-2\sqrt{3}, +2\sqrt{3}\right]$, puis décroissante sur $\left[-2\sqrt{3}, +\infty\right[$. La droite d'équation y=1 est une asymptote.

2. Déterminer le point d'intersection des graphes de f_1 et f_2.

Le point $A(0,1)$ répond à la question.

3. Trouver deux polynômes différents P_1 et P_2 de même degré n, tels que : $\begin{cases} f_1(x) = P_1(x) + x^n\,e_1(x) \\ f_2(x) = P_2(x) + x^n\,e_2(x) \end{cases}$, où e_1 et e_2 sont des fonctions définies au voisinage de zéro telles que $\lim\limits_{x\to 0} e_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} e_2(x) = 0$

Il s'agit de développer ces fonctions au voisinage de zéro par la formule de Taylor.

On a : $f_1(x) = \dfrac{x+2}{2-x} = \dfrac{1}{2}(x+2)(1-\dfrac{1}{2}x)^{-1} = \dfrac{1}{2}(2+x)(1+\dfrac{x}{2}+....+\dfrac{x^n}{2^n}+o(x^n))$

D'où $f_1(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{2^{k-1}} + x^n\,e_1(x)$

Pour la deuxième fonction, on ne cherchera pas à expliciter le polynôme.

$$f_2(x) = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} = 1 + x\left(1 + \frac{x^2-6x}{12}\right)^{-1}$$

4. Préciser la position relative des deux graphes au voisinage du point $A(0,1)$.
Supposons $f_1(x) \geq f_2(x) \Leftrightarrow 2x^3 \geq 0$
Au voisinage du point considéré, le graphe de f_1 est au-dessus de celui de f_2 pour x>0 et en dessous dans le cas contraire.

Exercice n° 6

1. On considère une suite (u_n) de nombres réels positifs qui vérifie : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$, où β est une constante réelle. Etudier la convergence de la série de terme général u_n selon les valeurs du paramètre β.

Pour $\alpha > 0$, posons $v_n = n^{-\alpha}$, on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

- Si $\beta \neq \alpha$ et pour n grand, $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est du signe de $\beta - \alpha$.
- Si $\beta > 1$, on choisit α tel que : $1 < \alpha < \beta$, alors $\sum v_n$ est convergente et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, donc $\sum u_n$ converge (rapport de d'Alembert).
- Si $\beta < 1$, on choisit α tel que : $1 > \alpha > \beta$, alors $\sum v_n$ est convergente et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, donc $\sum u_n$ converge (idem pour $\beta = 1$).

2. Etudier la convergence de la série de terme général : $\frac{1 \times 3 \times 5.....\times(2n-1)}{2 \times 4 \times 6....\times(2n)}$

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n}(1+\frac{2}{n})^{-1} = 1 - \frac{3}{2}n + \grave{a}(\frac{1}{n^2})$, donc la série est convergente.